ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ

#15

ΝΕΑ ΣΕΙΡΑ
'Απρίλης - Μάης - 'Ιούνης 1980

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ

18

ΟΙ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΕΚΦΡΑΣΗΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BUDAN-FOURIER ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥΣ*

Ἀλκιβιάδη Γ. Ἀκρίτα

Department of Computer Science
University of Kansas
U.S.A.

Τό θέμα μας ἔχει σχέση μέ τήν θεωρία τῶν ἐξισώσεων. Πρίν δέ τό ἀναπτύξουμε θεωροῦμε σκόπιμη μία ἱστορική ἀνασκόπιση, πού θά μᾶς ἐπιτρέψει νά τό τοποθετήσουμε στό σωστό ἱστορικό πλαίσιο καί θά μᾶς βοηθήσει νά κάνουμε μία ὀρθή ἐκτίμησή του.

Ὅπως εἶναι γνωστό, οἱ Ἰταλοί μαθηματικοί τοῦ 15ου καί 16ου αἰῶνα Tartaglia, Cardano καί Ferrari ἔκαναν τήν πρώτη σοβαρή ἐργασία στήν θεωρία τῶν ἐξισώσεων, ἐπιτυγχάνοντας νά λύσουν ἀλγεβρικά τίς γενικές ἐξισώσεις 3ου καί 4ου βαθμοῦ. Μετά ἀπό αὐτούς, οἱ μαθηματικοί τοῦ 17ου καί 18ου αἰῶνα ἔκαναν πολλές ἀνεπιτυχεῖς προσπάθειες γιά νά λύσουν μέ τόν ἴδιο τρόπο τήν γενική ἐξίσωση 5ου βαθμοῦ. Φυσικό λοιπόν ἦταν νά ἀναρωτηθοῦν ἄν ὑπάρχει μία τέτοια λύση. Τό 1804 ὁ Ruffini ἀπέδειξε πώς εἶναι ἀδύνατο νά λυθεῖ ἀλγεβρικά ἡ γενική ἐξίσωση 5ου βαθμοῦ καί ἀργότερα, τό 1826, ὁ Abel ἀπέδειξε πώς μέ αὐτόν τόν τρόπο εἶναι ἀδύνατο νά λυθοῦν οἱ γενικές ἐξισώσεις βαθμοῦ μεγαλύτερου τοῦ 4ου. Ἔτσι ἀπό τίς

---

* Μία ἀρχική μορφή τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ δημοσιεύθηκε καί στόν 5ο τόμο διαλέξεων τοῦ Γενικοῦ Σεμιναρίου Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Πατρῶν, σελ. 127-145 (1979).

ἀρχές τοῦ 19ου αἰῶνα οἱ μαθηματικοί εἶχαν στρέψει τήν προσοχή τους σέ ἀριθμητικές μεθόδους λύσης τῶν ἐξισώσεων. Τήν περίοδο αὐτή ὁ Fourier συνέλαβε τήν ἰδέα νά διασπάσει τό ὅλο πρόβλημα σέ δύο εὐκολώτερα, δηλ.:

1ο) στήν ἀπομόνωση τῶν ριζῶν, καί

2ο) στήν προσέγγισή τους μέ ὅση ἀκρίβεια ἐπιθυμοῦμε.

Τό πρόβλημα τῆς προσέγγισης τῶν ριζῶν ἔχει λυθεῖ ἱκανοποιητικά ἀπό τούς Lagrange, Horner καί Newton καί ἔτσι δέν θά μᾶς ἀπασχολήσει.

Λέγοντας ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου ἐννοοῦμε τήν διαδικασία μέ τήν ὁποία βρίσκουμε διαστήματα τέτοια ὥστε κάθε ἕνα νά περιέχει μόνο μία ρίζα καί κάθε ρίζα νά περιέχεται σέ κάποιο διάστημα. Ὁ Budan καί ὁ Fourier διατύπωσαν δύο διαφορετικά θεωρήματα (πού εἶναι ὅμως ἰσοδύναμα) μέ τήν βοήθεια τῶν ὁποίων μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν, πού ἔχει ἡ πολυωνυμική ἐξίσωση $P_{(x)}=0$ μέσα σέ ἕνα διάστημα. Καί τά δύο θεωρήματα χρησιμοποιοῦν τήν ἔννοια τῶν μεταβολῶν προσήμου (σέ μία ἀριθμητική ἀκολουθία), ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός 1. Λέμε πώς ὑπάρχει μία μεταβολή προσήμου μεταξύ δύο ἀριθμῶν C_p καί C_q $(p<q)$ μιᾶς πεπερασμένης ἤ ἀπείρου ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν $C_1, C_2, \ldots$, ἄν C_p καί C_q εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν καί ἔχουν ἀντίθετα πρόσημα, καί στήν περίπτωση πού $q \geq p+2$ (δηλ. ὁ C_q δέν εἶναι ὁ ἄμεσα ἑπόμενος τοῦ C_p) οἱ ἀριθμοί $C_{p+1}, \ldots, C_{q-1}$ εἶναι ὅλοι μηδέν.

(Στά ἑπόμενα θά λέμε πώς ἕνα πολυώνυμο "ἔχει" ἤ "παρουσιάζει" V μεταβολές προσήμου καί θά παραλείπουμε τήν φράση "στήν ἀκολουθία τῶν συντελεστῶν του". Ἐπίσης, οἱ ἀποδείξεις τῶν διαφόρων προτάσεων θά παραλείπονται γιατί ὑπάρχουν στήν βιβλιογραφία.).

Ἡ ἰσοδυναμία πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν θεωρημάτων τοῦ Budan καί τοῦ Fourier ἔγινε ἀφορμή νά ξεχασθεῖ σχεδόν ἐντελῶς τό πρῶτο ἐνῶ τό δεύτερο νά ὀνομάζεται θεώρημα Budan-Fourier ἤ Fourier-Budan. Πρόσφατη ὅμως ἐργασία μας ἔδειξε πώς κάθε ἕνα θεώρημα ἔχει ξεχωριστή σημασία μέ ἐντελῶς διαφορετικές συνέπειες, πρᾶγμα πού θά δοῦμε στή συνέχεια.

Τό θεώρημα τοῦ Fourier καί ἡ μέθοδος Sturm γιά τήν απομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν ἑνός πολυώνυμου.

Τό θεώρημα τοῦ Fourier ἐμφανίστηκε τό 1831 στό βιβλίο του Analyse des Équations, τό ὁποῖο δημοσιεύτηκε μετά τόν θάνατό του ἀπό τόν C.L.M.H. Navier. Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά τόν βρεῖ διατυπωμένο μέ διαφορετικό τρόπο σέ ὅλα σχεδόν τά βιβλία τά σχετικά μέ τήν θεωρία τῶν ἐξισώσεων μέ τό ὄνομα Budan-Fourier ἤ Fourier-Budan [8], [10], [11], [12].

Ὁ Hurwitz [10] τό παρουσιάζει σάν ειδική περίπτωση ἑνός πιό γενικοῦ θεωρήματος καί ὁ Obreschkoff ([11] σελ. 76-87) τό γενικεύει γιά μιγαδικές ρίζες. Ἐμεῖς τό παρουσιάζουμε μέ τήν μορφή πού βρίσκεται στό ἄρθρο τοῦ Vincent ([14] σελ. 342).

Θεώρημα 1 (Fourier). Ἄν στήν ἀκολουθία τῶν m+1 συναρτήσεων (F) $P(x)$, $P^{(1)}(x), \ldots, P^{(m)}(x)$ ἀντικαταστήσουμε τό x μέ δύο πραγματικούς ἀριθμούς p,g $(p<q)$, καί ἄν παραστήσουμε μέ $\tilde{P}, \tilde{Q}$ τίς δύο ἀριθμητικές ἀκολουθίες πού προκύπτουν, τότε

(i) ἡ ἀκολουθία $\tilde{P}$ δέν μπορεῖ νά ἔχει λιγότερες μεταβολές προσήμου ἀπό τήν ἀκολουθία $\tilde{Q}$,

(ii) ὁ ἀριθμός τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $P(x)=0$ πού βρίσκονται μεταξύ p καί q, ποτέ δέν μπορεῖ νά ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό τῶν μεταβολῶν προσήμου πού χάνονται στήν μετάβαση ἀπό τήν ἀντικατάσταση $x=p$ στήν ἀντικατάσταση $x=q$,

(iii) ἄν ὁ πρῶτος ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τόν δεύτερο ἡ διαφορά τους εἶναι ἕνας ἄρτιος ἀριθμός.

$P^{(i)}(x)$ παριστάνει τήν $i^{\text{στή}}$ παράγωγο τοῦ $P(x)$ ὡς πρός x. Ἡ ἀκολουθία (F) τῶν m+1 συναρτήσεων λέγεται ἀ κ ο λ ο υ θ ί α F o u r i e r. Εἶναι φανερό πώς τό θεώρημα 1 μᾶς δίνει ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν πού ἔχει ἡ ἐξίσωση $P(x)=0$ μέσα στό διάστημα (p,g). (m ἐδῶ εἶναι ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου $P(x)$).

Ὅπως εἴπαμε προηγούμενα τό θεώρημα τοῦ Fourier δημοσιεύτηκε τό 1831. Σέ χειρόγραφο ὅμως κυκλοφόρησε σέ στενό κύκλο μαθηματικῶν τό 1829. Ἕνας ἀπό τούς μαθηματικούς πού πῆραν αὐτό τό χειρόγραφο ἦταν καί ὁ Sturm [7], ὁ ὁποῖος στηριζόμενος στό θεώρημα τοῦ Fourier, διατύπωσε μέσα στόν ἴδιο χρόνο (1829) τό δικό του θεώρημα. Μέ τήν βοήθεια τοῦ νέου αὐτοῦ θεωρήματος βρίσκουμε τόν ἀκριβή ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν πού ἔχει ἡ ἐξίσωση $P(x)=0$ μέσα σέ ἕνα διάστημα. Ἔτσι λύθηκε τό πρόβλημα τῆς ἀπομόνωσης τῶν πραγματικῶν ριζῶν.

Εἶναι γνωστό πώς ὁ Sturm χρησιμοποίησε ἀντί γιά τήν ἀκολουθία (F) τήν ἀκολουθία

$$(S)\, P(x),\ P^{(1)}(x),\ R_1(x), \ldots, R_k(x),$$

πού λέγεται ἀ κ ο λ ο υ θ ί α S t u r m. Τά $R_i(x)$, $i=1,2,\ldots,k$ εἶναι τά ἀρνητικά τῶν ὑπολοίπων πού προκύπτουν ὅταν ἐφαρμόσουμε στά πολυώνυμα $P(x)$ καί $P'(x)$ τόν Εὐκλείδιο ἀλγόριθμο γιά νά βρεθεῖ ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Ἔχουμε δηλ. τίς σχέσεις:

$$\begin{aligned}
P(x) &= P^{(1)}(x)Q_1(x) - R_1(x)\\
P^{(1)}(x) &= R_1(x)Q_2(x) - R_2(x)\\
&\ \ \vdots\\
R_{k-2}(x) &= R_{k-1}(x)Q_k(x) - R_k(x).
\end{aligned}$$

Ἐάν μέ $V(\xi)$ παραστήσουμε τόν ἀριθμό τῶν μεταβολῶν προσήμου στήν ἀκολουθία (S) γιά $x=\xi$, τότε ἰσχύει τό ἀκόλουθο.

Θεώρημα 2. (Sturm 1829). Ἄν ἡ πολυωνυμική ἐξίσωση $P(x)=0$ ἔχει μόνον ἁπλές ρίζες, τότε ὁ ἀριθμός τῶν πραγματικῶν της ριζῶν μέσα στό διάστημα (p,q) εἶναι:

$$V(p)-V(q)$$

Ἡ μέθοδος Sturm γιά τήν ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν εἶναι πολύ ἁπλή: Ὑπολογίζουμε πρῶτα ἕνα ἀπόλυτο πάνω φράγμα, τῶν ριζῶν τῆς $P(x)=0$, (δηλ. ὅλες οἱ πραγματικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης βρίσκονται μέσα στό διάστημα $(-b,b)$) καί μετά ὑποδιαιροῦμε τό διάστημα $(-b,b)$ μέχρις ὅτου κάθε ὑποδιάστημά του περιέχει μόνο μία ρίζα. Ἀπό τό 1830 ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ μόνη γνωστή καί ἀναφέρεται σέ ὅλα τά σχετικά συγγράμματα. Τό γεγονός ὅτι ἰσχύει γιά πολυώνυμα χωρίς πολλαπλές ρίζες δέν περιορίζει τήν γενικότητα γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση μποροῦμε νά ἀναλύσουμε τό P(x) σέ γινόμενο παραγόντων κάθε ἕνας ἀπό τούς ὁποίους ἔχει μόνο ἁπλές ρίζες,

$$P=\prod_{i=1}^{e} S_i^i$$

(Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν νέα μέθοδο πού θά παρουσιάσουμε στά ἑπόμενα.

Παράδειγμα 1. Θέλουμε νά ἀπομονώσουμε τίς ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$P(x)=x^3-7x+7=0,$$

γιά τήν ὁποία ἔχουμε ὅτι b=8. Ἡ ἀκολουθία (S) στήν περίπτωση αὐτή εἶναι:

$$P(x)=x^3-7x+7$$

$$P^{(1)}(x)=3x^2-7$$

$$R_1(x)=2x-3$$

$$R_2(x)=1$$

Μέ συνεχή ὑποδιαίρεση τοῦ διαστήματος (-8,8) καί ἐφαρμογή τοῦ Θεωρήματος 2 βρίσκουμε ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης περιέχονται στά διαστήματα

$$(-4,-3),\ (1,3/2),\ (3/2,2).$$

Ἀρχικά ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου Sturm στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές δέν εἶχε καί τόση ἐπιτυχία. Αὐτό ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι, ὅταν δουλεύουμε μέ ἀκέραιους ἀριθμούς, κατά τήν διάρκεια τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀκολουθίας (S) οἱ συντελεστές τῶν πολυωνύμων γίνονται πολύ μεγάλοι. Αὐτό ἔχει σάν ἀποτέλεσμα νά μήν χωρᾶνε σέ μία ἤ καί σέ δύο λέξεις τῆς μνήμης τοῦ ὑπολογιστή, μέ συνέπεια τά λάθη στρογγύλευσης νά εἶναι πολύ μεγάλα. Τό 1970 ὅμως ἡ μέθοδος Sturm προγραμματίστηκε σέ ἕνα "σύστημα ἄλγεβρας γιά ὑπολογιστές" (Computer Algebra System) [9] καί δείχθηκε πώς ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ της εἶναι:

(1) $$O(n^{13} L(|P|_\infty)^3),$$

ὅπου n εἶναι ὁ βαθμός τοῦ πολυώνυμου, καί $L(|P|_\infty)$ τό μῆκος, σέ Bits, τοῦ μεγίστου συντελεστή κατά ἀπόλυτο τιμή.

Εὔκολα καταλαβαίνει ὁ ἀναγνώστης πώς ἡ μέθοδος Sturm εἶναι πολύ ἀργή.

Ἔχει ἀποδειχθεῖ [9] πώς ἡ βραδύτητα αὐτή ὀφείλεται στόν ὑπολογισμό τῆς ἀκολουθίας (S). Συνεπῶς γιά τίς ἐφαρμογές χρειάζεται μία ἄλλη μέθοδος πιό γρήγορη, καί τέτοια εἶναι ἡ δική μας πού περιγράφεται στό ἑπόμενο μέρος τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ.''

Σ η μ ε ί ω σ η: Τά διάφορα "συστήματα ἀλγέβρας γιά ὑπολογιστές" πού ἀναπτύχθηκαν τά τελευταῖα 15 χρόνια μᾶς ἐπιτρέπουν νά κάνουμε πράξεις μέ ἀκεραίους "ἀπεριορίστου" μήκους. Ἔτσι, γιά νά ἀποφύγουμε τά λάθη στρογγύλευσης, στό ἄρθρο αὐτό ἀσχολούμαστε μέ πολυώνυμα τά ὁποῖα ἔχουν μόνο ἀκεραίους (ἤ ρητούς) συντελεστές.

Τό θεώρημα τοῦ Budan καί μία νέα μέθοδος γιά τήν απομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου*.

Τό θεώρημα Budan ἐμφανίσθηκε τό 1807 καί παρ᾽ὅλη του τήν σπουδαιότητα, ὅπως προέκυψε ἀπό πρόσφατη μελέτη, δέν βρίσκεται σχεδόν πουθενά στήν βιβλιογραφία [8], [11], [12], [13].

Ἀπό τόν Vincent ([14] σελ. 342) διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Θεώρημα 3. (Budan 1807). Ἄν στήν ἐξίσωση $P(x)=0$ κάνουμε τούς δύο μετασχηματισμούς $x=p+x'$ καί $x=q+x''$, ὅπου p καί q εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί $(p<q)$ τότε:

(i) ἡ μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x'=x-p$ δέν μπορεῖ νά ἔχει λιγότερες μεταβολές προσήμου ἀπό τήν μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x''=x-q$,

(ii) ὁ ἀριθμός τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $P(x)=0$ πού βρίσκονται μεταξύ p καί q, ποτέ δέν ὑπερβαίνει τόν ά-

---

* Ἡ μέθοδος αὐτή πρωτοπαρουσιάστηκε στό συνέδριο τῆς Association For Computing Machinery στήν Atlanta, Georgia τῶν Η.Π.Α. τόν Ἀπρίλιο τοῦ 1978. Βλέπε καί τήν ἐργασία μας [2].

ριθμό τῶν μεταβολῶν προσήμου πού χάνονται στήν μετάβαση ἀπό τήν μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x'=x-p$ στήν μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x''=x-q$,

(iii) ἄν ὁ πρῶτος ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τόν δεύτερο, ἡ διαφορά τους εἶναι ἕνας ἄρτιος ἀριθμός.

Ὅπως τό θεώρημα 1, ἔτσι καί τό θεώρημα 3 μᾶς δίνει ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν πού ἔχει ἡ ἐξίσωση $P(x)=0$ μέσα στό διάστημα (p,q). Ὁ ἀναγνώστης πρέπει ὅμως νά προσέξει πώς τώρα δέν χρησιμοποιεῖται ἀκολουθία πολυωνύμων ὅπως προηγούμενα, ἀλλά μόνον μετασχηματισμοί τῆς μορφῆς $x=r+y$.

Ἡ ἰσοδυναμία τῶν θεωρημάτων 1 καί 3 προκύπτει μέ ἐφαρμογή τοῦ ἀναπτύγματος Taylor: Ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν ἀκολουθία (F) τό x μέ α τότε οἱ $m+1$ ἀριθμοί πού ἐμφανίζονται εἶναι ἀνάλογοι μέ τούς ἀντίστοιχους συντελεστές τῆς ἐξίσωσης $P(x+\alpha)=0$.

Ὅπως θά δοῦμε ὅμως τό θεώρημα τοῦ Budan ἀποτελεῖ τήν βάση τοῦ θεωρήματος τοῦ Vincent [14], [13] ἀπό τό ὁποῖο προέρχεται ἡ δική μας μέθοδος γιά τήν ἀπομόνωση τῶν ριζῶν. Προτοῦ διατυπώσουμε τό θεώρημα τοῦ Vincent ὑπενθυμίζουμε ὁρισμένες γνωστές προτάσεις πού εἶναι σχετικές μέ αὐτό.

Θεώρημα 4 (Cardano-Descartes). Ἔστω τό πολυώνυμο

$$P(x)=C_n x^n+C_{n-1}x^{n-1}+\cdots+C_1 x-C_0$$

μέ πραγματικούς συντελεστές. Ἄν V εἶναι ὁ ἀριθμός μεταβολῶν τοῦ προσήμου στήν ἀκολουθία τῶν συντελεστῶν $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1, C_0$ καί p ὁ ἀριθμός τῶν θετικῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου $P(x)$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση

$$V-p=2\lambda,$$

ὅπου $\lambda \geq 0$ καί ἀκέραιος.

Ὕστερα ἀπό προσεκτική μελέτη βλέπουμε ὅτι τό θεώρημα 4 εἶναι μία ὄχι καί τόσο ἰσχυρή πρόταση, γιατί δίνει τόν ἀκριβή ἀριθμό τῶν ριζῶν μόνον στίς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

(i) ἄν δέν ὑπάρχει μεταβολή προσήμου δέν ὑπάρχει θετική ρίζα, καί

(ii) άν ύπάρχει μία μεταβολή προσήμου ύπάρχει μία θετική ρίζα,

Εὔκολα συμπεραίνουμε πώς τό άντίστροφο τῆς (i) ίσχύει πάντοτε, ένῶ γιά τό άντίστροφο τῆς (ii) ίσχύει τό άκόλουθο:

Λῆμμα 1 ([5]). Ἔστω $P(x)=0$ μία πολυωνυμική έξίσωση βαθμοῦ $n>1$, χωρίς πολλαπλές ρίζες πού ἔχει μία θετική ρίζα $\xi\neq 0$ καί $n-1$ ρίζες $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1}$ μέ άρνητικό πραγματικό μέρος (οἱ μιγαδικές ρίζες έμφανίζονται σάν συζυγῆ ζεύγη) οἱ ὁποῖες ἔχουν τήν μορφή

$$\xi_j=-(1+\alpha_j),\quad j=1,2,\ldots,n-1$$

μέ $|\alpha_j|<\varepsilon_n$, ὅπου

$$\varepsilon_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}-1.$$

Τότε τό πολυώνυμο $P(x)$, στήν άναλυτική του μορφή παρουσιάζει άκριβῶς μία μεταβολή προσήμου.

Σ η μ ε ί ω σ η: Ἄς προσέξει ὁ άναγνώστης ὅτι $\varepsilon_n\approx\frac{1}{n(n-1)}$.

Οἱ προηγούμενες δύο είδικές περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τῶν Cardano-Descartes χρησιμοποιοῦνται στό θεώρημα τοῦ Vincent πού ἔχει ὡς ἑξῆς:

Θεώρημα 5 (Vincent 1836 [14]). Ἄν σέ μία πολυωνυμική έξίσωση μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες κάνουμε διαδοχικά τούς μετασχηματισμούς

$$x=\alpha_1+\frac{1}{x'},\quad x'=\alpha_2+\frac{1}{x''},\quad x''=\alpha_3+\frac{1}{x'''},\ \ldots$$

ὅπου τά α_i εἶναι τυχαῖοι, άκέραιοι, θετικοί άριθμοί, τότε ἡ τελική, μετασχηματισμένη έξίσωση ἔχει μία ἤ καμμία μεταβολή προσήμου.

Στήν πρώτη περίπτωση ἡ έξίσωση ἔχει μία θετική ρίζα πού παριστάνεται άπό τό συνεχές κλάσμα

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}$$

ἐνῶ στήν δεύτερη περίπτωση δέν ἔχει καμμία θετική ρίζα.

Τό Θεώρημα 5 ὑπαινίχθηκε ἀπό τόν Fourier, καί ὁ Vincent ἐκφράζει τήν ἔκπληξή του ὅτι ὁ πρῶτος δέν τό ἀπέδειξε, (ἤ καί ἄν τό ἔκανε, ὅτι ἡ ἀπόδειξη δέν βρέθηκε στίς σημειώσεις του). Τό θεώρημα τοῦ Vincent εἶχε τόσο πολύ ξεχαστεῖ ὥστε δέν ἀναφέρεται οὔτε στήν μνημειώδη ἐργασία Enzyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften.

Ἡ ἐξάρτηση τοῦ θεωρήματος τοῦ Vincent ἀπό τό θεώρημα τοῦ Budan φαίνεται ἄν κάθε ἕνας μετασχηματισμός τῆς μορφῆς $x=a+\frac{1}{y}$ ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό ἰσοδύναμο ζεῦγος μετασχηματισμῶν $x=a_1+y'$, $y'=\frac{1}{y}$. Μετά ἀπό λίγη σκέψη (βλέπε καί τό παράδειγμα 2 πού ἀκολουθεῖ) φαίνεται πώς ὅταν ἡ τελική μετασχηματισμένη ἐξίσωση (τοῦ θεωρήματος 5) ἔχει μόνο μία μεταβολή προσήμου, μποροῦμε νά ἀπομονώσουμε μία θετική ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης. Οἱ ἀρνητικές ρίζες ἐξετάζονται ἀφοῦ γίνουν πρῶτα θετικές μέ τήν ἀντικατάσταση τοῦ x ἀπό τό -x στήν ἀρχική ἐξίσωση.

Τό μόνο πού δέν ἀναφέρει καθόλου τό θεώρημα τοῦ Vincent εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μετασχηματισμῶν πού πρέπει νά γίνουν γιά νά ἀποκτήσουμε τό τελικό πολυώνυμο μέ μία, τό πολύ, μεταβολή προσήμου. Ὁ Uspensky ([13] σελ. 298-303) ἐπιχείρησε νά δώσει ἀπάντηση σέ αὐτό τό ἐρώτημα ἐπεκτείνοντας τό θεώρημα τοῦ Vincent. Ἡ προσπάθειά του ὅμως ἀπέτυχε μερικῶς γιατί τό νέο θεώρημα εἶχε λάθη στήν διατύπωση καί ἀπόδειξη. Στό [3] δείχνουμε πώς διορθώνονται τά λάθη αὐτά, καί διατυπώνουμε τήν ἀκόλουθη σωστή μορφή τοῦ θεωρήματος.

Θεώρημα 6. Ἔστω $P(x)=0$ μία πολυωνυμική ἐξίσωση βαθμοῦ $n>1$ μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες, καί ἔστω $\Delta>0$ ἡ μικρότερη ἀπόσταση μεταξύ δύο τυχαίων ριζῶν. Ἔστω m ὁ μικρότερος δείκτης, ὥστε

$$F_{m-1}\frac{\Delta}{2} > 1 \quad \text{καί} \quad F_{m-1}F_m\Delta > 1+\frac{1}{\varepsilon_n}$$

ὅπου F_k εἶναι τό $k^{\sigma\tau\acute{o}}$ μέλος τῆς ἀκολουθίας Fibonacci

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

καί $\varepsilon_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}-1$.

Τότε ὁ μετασχηματισμός

$$x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_m+\cfrac{1}{\xi}}},$$

ὅπου τά α_i εἶναι τυχαῖοι, θετικοί, ἀκέραιοι ἀριθμοί μετασχηματίζει τήν ἐξίσωση $P(x)=0$ στήν ἐξίσωση $\tilde{P}(\xi)=0$, ἡ ὁποία ἔχει τό πολύ μία μεταβολή προσήμου.

Ἀπό τό θεώρημα αὐτό φαίνεται πώς τό m εἶναι ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς

$$x=\alpha_i+\frac{1}{y}$$

πού πρέπει νά γίνουν, ὥστε ἡ τελική ἐξίσωση νά ἔχει τό πολύ μία μεταβολή προσήμου. Ἔχουμε δείξει δέ ([1] σελ. 72-73) ὅτι

$$m=O(nL(|P|_\infty)). \tag{2}$$

Τό θεώρημα 6 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $P(x)=0$. Ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν α_i, $1\leqslant i\leqslant m$ - γιά τούς μετασχηματισμούς πού καταλήγουν σέ πολυώνυμο μέ μία μεταβολή προσήμου - συνιστᾶ τήν μέθοδο ἀπομόνωσης τῶν ριζῶν. Ἀπό τό θεώρημα 6 ἀπορρέουν δύο μέθοδοι, ἡ μέθοδος τοῦ Vincent καί μία νέα μέθοδος, πού ἀντιστοιχοῦν στούς δύο διαφορετικούς τρόπους ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν α_i. Ἡ διαφορά τῶν δύο αὐτῶν μεθόδων, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀνάλογη μέ μία διαφορά πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ Riemann καί Lebesgue*.

*(Ὅπως εἶναι γνωστό τό ἄθροισμα 1+1+1+1+1 ὑπολογίζεται μέ δύο τρόπους: (α) ὡς ἀκολουθία ἀθροισμάτων 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, 4+1=5 (Riemann) καί (β) ὡς 5·1=5 (Lebesgue)).

Μέ τήν μέθοδο Vincent ὑπολογίζουμε τίς τιμές γιά κάθε ἕνα ἀπό τά a_i μέ μοναδιαῖες αὐξήσεις $a_i \leftarrow a_i+1$. Ἀποτέλεσμα αὐτοῦ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν a_i εἶναι ὅτι ἡ ἀντίστοιχη μέθοδος ἔχει ἐκθετική συμπεριφορά. Δηλαδή γιά άρκετά μεγάλες τιμές τῶν a_i θά χρειαστεῖ πολύς χρόνος γιά τήν ἀπομόνωση τῶν ριζῶν (μπορεῖ νά χρειαστοῦν χρόνια ἀκόμα καί μέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή). Ἔτσι βλέπουμε πώς ἡ μέθοδος Vincent ἔχει λίγη πρακτική σημασία.

Ὁ δεύτερος τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν a_i ὀφείλεται σέ συστηματικότερη μελέτη τῶν a_i. Κάθε ἕνα ἀπό τά a_i εἶναι τό κάτω φράγμα $\underline{b}$ τῶν θετικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου (ὑποθέτουμε πώς $\underline{b}=\lfloor a_s \rfloor$, ὅπου a_s εἶναι ἡ μικρότερη θετική ρίζα), ([1], σελ. 81-82). Ἡ ἑρμηνεία αὐτή τῶν a_i γίνεται φανερή ἄν πρῶτα διατυπώσουμε τόν ἀντικειμενικό μας σκοπό. Διαισθητικά μιλώντας, ὁ σκοπός τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς $x=a_i+\frac{1}{y}$, πού γίνονται στήν ἐξίσωση $P(x)=0$, εἶναι γιά νά μπεῖ μία ἀπό τίς θετικές της ρίζες στό διάστημα $(0,1)$ καί ὅλες οἱ ἄλλες στό διάστημα $(1,\infty)$ ἤ ἀντίστροφα - ἐξαιρώντας φυσικά τήν περίπτωση πού τό 1 εἶναι μία ρίζα. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ ἐφαρμογή στήν συνέχεια τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=\frac{1}{1+y}$ καταλήγει σέ μία ἐξίσωση μέ μόνο μία ρίζα στό διάστημα $(0,\infty)$, ἐνῶ γιά τήν δεύτερη περίπτωση τό ἴδιο ἐπιτυγχάνεται μέ τήν ἐφαρμογή στήν συνέχεια τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=1+y$.

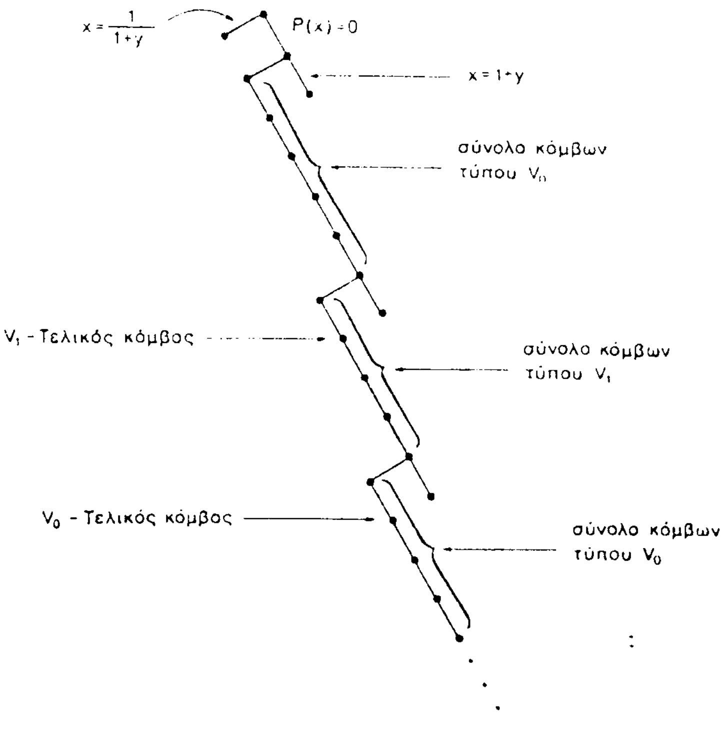
Εἶναι προφανές ὅτι ὁ μετασχηματισμός $x=\frac{1}{y}$ ἀπεικονίζει κάθε ζεῦγος δύο διαφορετικῶν ἀριθμῶν τοῦ $(0,1)$ σέ ἕνα ζεῦγος ἀριθμῶν τοῦ $(1,\infty)$ πού ἡ ἀπόσταση μεταξύ τους εἶναι μεγαλύτερη ἀπό αὐτή τῶν δύο ἀρχικῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι γιά τήν ἐκπλήρωση τοῦ ἀντικειμενικοῦ μας σκοποῦ πρέπει νά κάνουμε τό ἑξῆς: ὅποτε ὑπάρχουν περισσότερες ἀπό μία πραγματικές ρίζες στό διάστημα $(0,1)$, πρῶτα τίς ἀντιστρέφουμε γιά νά ἀραιώσουν μεταξύ τους καί μετά τίς μεταφέρουμε πρός τό 0 μέ τήν ἐλπίδα πώς τώρα θά μποῦν στό διάστημα $(0,1)$ μία - μία. Μέ αὐτήν τήν σκέψη καταλήγουμε λοιπόν στήν ἑρμηνεία τῶν a_i σάν τό κάτω φράγμα τῶν θετικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου. Γιά μία πιό πλήρη κατανόηση ὅμως τοῦ ὅλου θέματος πρέπει νά εἰσάγουμε ὁρισμένες καινούργιες ἔννοιες.

Θεωροῦμε ἕνα μή πεπερασμένο δυαδικό δένδρο μέ τήν κορυφή τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχοῦμε τήν ἐξίσωση τῆς ὁποίας θέλουμε νά ἀπομονώσουμε τίς θετικές ρίζες. Κάθε κόμβος τοῦ δένδρου αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ μέ μία μετασχηματισμένη ἐξίσωση πού προκύπτει ἀπό τήν ἀρχική μετά ἀπό διαδοχική ἐφαρμογή μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς $=\alpha+\frac{1}{\;}$.

Ἡ πορεία ἀπό ἕνα κόμβο πρός τόν δεξιό του ἀπόγονο ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς $=1+$, ἐνῶ ἡ πορεία πρός τόν ἀριστερό του ἀπόγονο ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς $=\frac{1}{1+}$ (1 σελ. 74-82). Συνεπῶς μία πορεία ἀπό τήν κορυφή τοῦ δένδρου πρός κάποιο κόμβο ἀντιστοιχεῖ μονοσήμαντα σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς

$$=\alpha + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3 +} \cdots + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\xi} .$$



Σχῆμα 1

Σέ μία τυχαία πορεία όλοι οἱ κόμβοι θά θεωροῦνται ὅτι ἀνήκουν σέ ἕνα ἀπό τά ἑξῆς τρία σύνολα (Σχῆμα 1):

(α) Σύνολο κόμβων τύπου V_n, ὅπου οἱ ἐξισώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στούς κόμβους ἔχουν περισσότερες ἀπό μία μεταβολές προσήμου.

(β) Σύνολο κόμβων τύπου V_1, ὅπου οἱ ἐξισώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στούς κόμβους ἔχουν μία μεταβολή προσήμου· ὁ "πρῶτος" κόμβος σέ ἕνα τέτοιο σύνολο καλεῖται V_1 - τελικός κόμβος.

(γ) Σύνολο κόμβων τύπου V_0, ὅπου οἱ ἐξισώσεις πού ἀνσιστοιχοῦν στούς κόμβους δέν ἔχουν μεταβολή προσήμου· ὁ "πρῶτος κόμβος σέ ἕνα τέτοιο σύνολο καλεῖται V_0-τελικός κόμβος.

Εὔκολα ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι τά σύνολα τῶν δύο πρώτων τύπων ἔχουν πεπερασμένο πλῆθος κόμβων, ἐνῶ τά σύνολα τύπου V_0 ἔχουν ἄπειρο πλῆθος κόμβων. Ἕνα σύνολο τύπου V_0 πάντοτε "ἀκολουθεῖ" ἕνα σύνολο τύπου V_1 ἤ V_n ἐνῶ ἕνα σύνολο τύπου V_1 ἤ V_n ποτέ δέν "ἀκολουθεῖ" ἕνα σύνολο τύπου V_0· ὅμοια ἔχουμε πώς ἕνα σύνολο τύπου V_n ποτέ δέν "ἀκολουθεῖ" ἕνα σύνολο τύπου V_1.

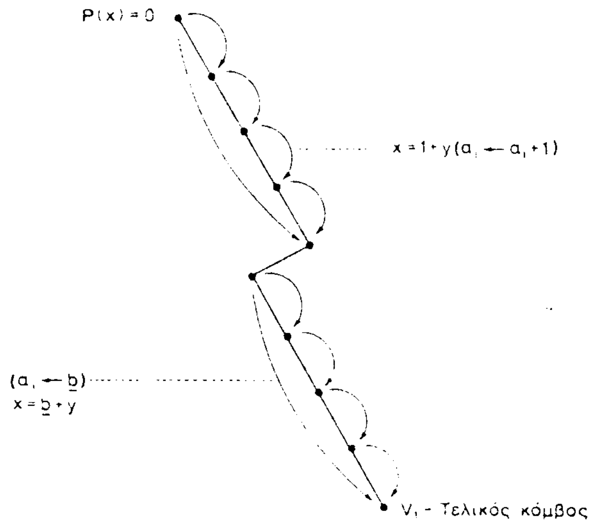
Γιά νά ἀπομονώσουμε λοιπόν τίς πραγματικές θετικές ρίζες τῆς $P(x)=0$, πρέπει στό δυαδικό δένδρο νά ἀκολουθοῦμε πορεῖες πού μᾶς ὁδηγοῦν σέ V_1-τελικούς κόμβους. Μέ αὐτές τίς ἔννοιες μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι μέ τήν μέθοδο Vincent φθάνουμε στόν V_1-τελικό κόμβο μέ μοναδιαῖα "ἅλματα", πού κάθε ἕνα ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς

$$x=1+y$$

(ἤ ἰσοδύναμα στήν αὔξηση $a_i \leftarrow a_i+1$ γιά κάποιο i) ἐνῶ ἀντίθετα μέ τήν νέα μέθοδο, πού περιγράφουμε φθάνουμε στόν V - τελικό κόμβο μέ "ἅλματα" πού κάθε ἕνα ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς

$$x=\underline{b}+y \ , \quad \underline{b} \geq 1$$

(ἤ ἰσοδύναμα στόν ἄμεσο ὑπολογισμό κάποιου a_i σάν τό κάτω φράγμα, $\underline{b}$, τῶν θετικῶν ριζῶν πολυωνύμου, δηλ. $a_i \leftarrow \underline{b}$ γιά κά-



Σχῆμα 2

ποιο i). Ἡ γεωμετρική εἰκόνα δίνεται ἀπό τό Σχῆμα 2. Ἔχουμε δέ δείξει [6] ὅτι ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=b+y$, $b>1$, εἶναι

(3) $$O(n^3L(b)^2+n^2L(b)L(|P|_\infty)),$$

πού εἶναι σχεδόν ὁ ἴδιος μέ τόν χρόνο ὑπολογισμοῦ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=1+y$.

Εὔκολα τώρα συμπεραίνουμε πώς ἡ μέθοδος Vincent ἔχει ἐκθετική συμπεριφορά ὅταν οἱ τιμές τῶν a_i εἶναι ἀρκετά μεγάλες, ἐνῶ ἡ νέα μέθοδος πού περιγράφουμε εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό αὐτές.

Μία ἀναγωγική (Recursive) περιγραφή τῆς μεθόδου μας γιά τήν ἀπομόνωση τῶν θετικῶν ριζῶν εἶναι ἡ ἑξῆς: (Οἱ λεπτομέρειες θά φανοῦν ἀπό τό παράδειγμα πού ἀκολουθεῖ).

Ἡ νέα μέθοδος

Ἔστω ἡ πολυωνυμική ἐξίσωση

(4) $$P(x)=0$$

μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες, ἡ ὁποία παρουσιάζει V μεταβολές προσήμου.

Περίπτωση 1η. Ἐάν V=0 ἤ V=1 ἡ μέθοδος τερματίζει.

Περίπτωση 2η. Ἐάν $V>1$ ὑπολογίζουμε πρῶτα τό κάτω φράγμα $\underline{b}$ τῶν θετικῶν ριζῶν καί ὕστερα τήν ἐξίσωση

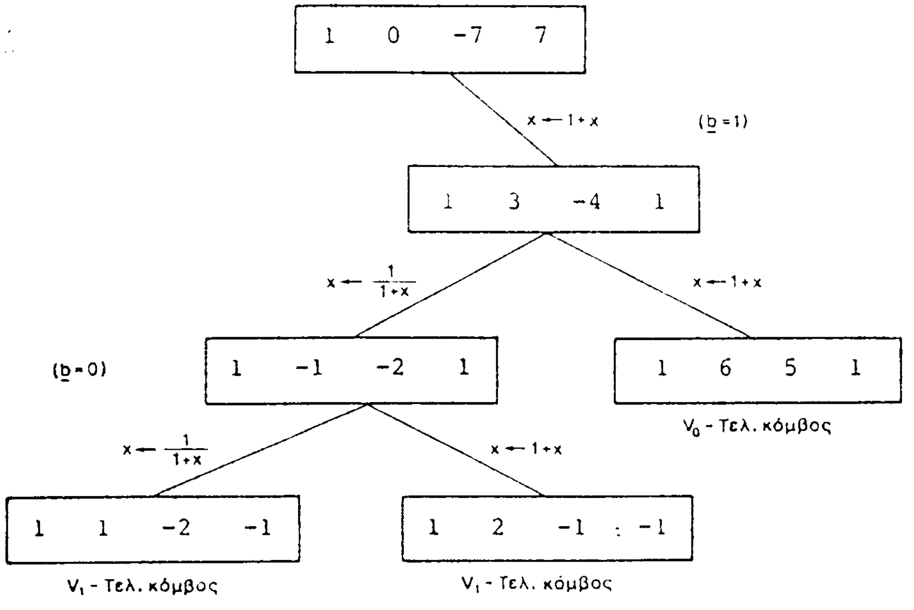
$$P_{\underline{b}}(x)=P(\underline{b}+x)=0$$

ἡ ὁποία ἔχει ἐπίσης V μεταβολές προσήμου ἄν $P(\underline{b})\neq 0$. (Ἐάν $P(\underline{b})=0$ ἔχουμε βρεῖ μία ἀκέραια ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης, καί ὁ V ἐλαττώνεται). Στήν συνέχεια ἡ μέθοδος μας ἐφαρμόζεται δύο φορές· μία φορά μέ τήν ἐξίσωση $P_{\underline{b}}\left(\frac{1}{1+x}\right)=0$ ἀντί τῆς (4), καί μία φορά μέ τήν ἐξίσωση $P_{\underline{b}}(1+x)=0$.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $\underline{b}=|\alpha_s|$, ὅπου α_s εἶναι ἡ μικρότερη θετική ρίζα. Ὁ χρόνος δέ ὑπολογισμοῦ τοῦ $\underline{b}$ εἶναι $O(n^2L(|P|_\infty))$.

Παράδειγμα 2. Θέλουμε νά ἀπομονώσουμε τίς θετικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$P(x)=x^3-7x+7=0.$$



Σχῆμα 1

'Εφαρμόζοντας τήν μέθοδό μας προκύπτει τό ἀκόλουθο δυαδικό δένδρο στό ὁποῖο γράφουμε μόνο τούς συντελεστές τῶν ἐξισώσεων (Σχῆμα 3). ('Η ἀντικατάσταση $x \quad \frac{\alpha+x}{\beta+x}$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τόν μετασχηματισμό $x=\frac{\alpha+y}{\beta+y}$).

Γιά νά προκύψει ἡ ἐξίσωση $x^3+x^2-2x-1=0$ ἔγινε ὁ μετασχηματισμός $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+t}}$

'Αντικαθιστώντας τό t πρῶτα μέ τό 0 καί μετά μέ τό προκύπτει τό διάστημα $\left(\frac{3}{2},2\right)$ τό ὁποῖο ἀπομονώνει μία θετική ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης $x^3-7x+7=0$. "Ομοια γιά νά προκύψει ἡ ἐξίσωση $x^3+2x^2-x-1=0$ ἔγινε ὁ μετασχηματισμός $x=1+\frac{1}{2+t}$, ἀπ' ὅπου προκύπτει τό διάστημα $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ τό ὁποῖο ἀπομονώνει τήν δεύτερη θετική ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης.

Γιά νά ἀποδείξουμε τόν χρόνο ὑπολογισμοῦ τῆς μεθόδου μας χρειαζόμαστε ἕνα πάνω φράγμα γιά τίς τιμές τῶν ποσοτήτων α πού μᾶς ὁδηγοῦν σέ V_0 ἤ V_1-τελικούς κόμβους. Αὐτό δίνεται ἀπό τό ἑξῆς:

Θεώρημα 7, ([1] σελ. 77-81). "Εστω $P(x)=0$ μία πολυωνυμική ἐξίσωση βαθμοῦ $n>1$, μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ μέ τήν κορυφή τοῦ δυαδικοῦ δένδρου. 'Εκτός αὐτοῦ ἔστω ὅτι ὁ μετασχηματισμός

$$x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{\alpha_\ell}+\cfrac{1}{\xi}}}},$$

ὅπου τά α εἶναι θετικοί ἀκέραιοι ἀριθμοί, $1\leqslant\ell\leqslant m$, μετασχηματίζει τήν ἐξίσωση $P(x)=0$ σέ μία ἄλλη πού ἀντιστοιχεῖ μέ V_0 ἤ V_1 τελικό κόμβο. Τότε γιά κάθε k, $1\leqslant k\leqslant\ell$ ἰσχύει

$$\alpha_k=0(|P|_\infty).// \tag{5}$$

Μέ τήν βοήθεια τῶν (2), (3) καί (5) εὔκολα προκύπτει ὅτι ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ τῆς μεθόδου εἶναι

$$0(n^5L(|P|_\infty)^3). \tag{6}$$

Συγκρίνοντας τίς (1) καί (6) βλέπουμε ὅτι ἡ μέθοδός μας εἶναι ταχύτατη καί ἐκτός αὐτοῦ διαφέρει ἀπό τήν μέθοδο Sturm γιατί χρησιμοποιεῖ συνεχή κλάσματα.

Παραθέτουμε τώρα ἕνα πίνακα ὅπου φαίνεται ἡ συντριπτική ὑπεροχή τῆς νέας μεθόδου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Πολυώνυμα μέ τυχαῖα παραχθέντες συντελεστές.

Βαθμός	Sturm	Ἡ Μέθοδός μας
5	2,05	.26
10	33.28	.26
15	156.40	.94
20	524,42	2.36

Ὅλοι οἱ συντελεστές τῶν πολυωνύμων ἦταν διάφοροι ἀπό τό μηδέν, ἀκέραιοι καί μέ δέκα ψηφία καθένας. Οἱ χρόνοι εἶναι σέ δευτερόλεπτα καί ἀποκτήθηκαν μέ τήν χρησιμοποίηση τοῦ συστήματος Sac-1 στόν ὑπολογιστή IBM S/370 Model 165 πού βρίσκεται στό Triangle Universities Computation Center, North Carolina, U.S.A.

Ἑπομένως βλέπουμε τήν μέχρι πρόσφατα ἀγνοημένη σημασία τοῦ θεωρήματος Budan, πού μᾶς δίνει τήν βάση γιά μία μέθοδο ἀπομόνωσης τῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου. Ὅπως δέ προκύπτει ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι καλύτερη ἀπό τίς γνωστές, τόσο ἀπό θεωρητικῆς ὅσο καί ἀπό πρακτικῆς ἄποψης.

Εὐχαριστίες

Ὁ συγγραφέας εὐχαριστεῖ τόν κριτή γιά τίς παρατηρήσεις του, οἱ ὁποῖες καλλιτέρεψαν τήν παρουσίαση τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Akritas, A.G., "Vincent's Theorem in Algebraic Manipulation", Ph.D. Thesis, Operations Research Program, North Carolina State University, Raleigh, N.C.,1978.

2. Akritas, A.G., "A New Method for Polynomial Real Root Isolation", Proceedings of the 16th Annual Southeast Regional ACM Conference, Atlanta, Georgia, April 1978, 39-43 (this paper received the First Prize in the Student Paper Competition).

3. Akritas, A.G., "A Correction on a Theorem by Uspensky", Bulletin of the Greek Mathematical Society, Vol.19, 278-285, 1978.

4. Akritas, A.G. and S.D. Danielopoulos, "On the Forgotten Theorem of Mr. Vincent", Historia Mathematica, Vol. 5, 427-435, 1978.

5. Akritas, A.G. and S.D. Danielopoulos, "On a Special Case of the Cardano-Descartes Rule of Signs", submitted for publication.

6. Akritas, A.G. and S.D. Danielopoulos, "On the Complexity of Algotithms for the translation of Polynomials", Computing, to appear.

7. Bŏcher, M., "The Published and Unpublished Work of Charles Sturm on Algebraic and Differential Equations", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 18, 1-18, 1911.

8. Burnside, W.S. and A.W. Panton, "The Theory of Equations", Dover, New York, Second Edition, 1960, Vol. 1.

9. Heindel, L.E., "Integer Arithmetic Algorithms for Polynomial Real Zero Determination", Journal of the ACM, Vol. 18, 533-548, 1971.

10. Hurwitz, A., "Ueber den Satz von Budan-Fourier", Mathematische Annalen, Vol. 71, 584-591, 1912.

11. Obreschkoff, N., "Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaflet, Berlin 1963.

12. Turnbull, H.W., "Theory of Equations", Oliver and Boyd, Edinburgh and London, Fifth Edition, 1952.

13. Uspensky, J.V., "Theory of Equations", McGraw-Hill, New York, 1948.

14. Vincent, A.J.H., "Sur la Résolution des Équations Numériques", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 1, 341-372, 1836.