Τό πρόβλημα τῶν ἱκανῶν καί ἀναγκαίων συνθηκῶν γιά λύσιμότητα τῆς (2) φαίνεται δύσκολο. Βλέπετε σχετικά καί τήν πρόσφατη ἀνακοίνωση [1], πού δέν περιλαμβάνει ὅμως πλήρεις ἀποδείξεις.

Βιβλιογραφία

[1] T.Aubin, Résolution d'une équation differentielle non linéaire, non inversible localement, C.R.Acad.Sc.Paris t. 287(1978), Série A, 1039-1041.

[2] J.Kazdan And F.Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Annals of Math.99(1974)14-47.

[3] J.Kazdan and F.Warner, Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures, Annals of Math.101(1975)317-331.

[4] D.Koutroufiotis, Gaussian curvature and conformal mapping, J.of Diff.Geometry 7(1972)479-488.

[5] J.Moser, On a nonlinear problem in Differential Geometry, Dynamical Systems (M.Peixoto ed.), Academic Press, N.Y. (1973).

Πανεπιστήμιο 'Ιωαννίνων
Φυσικομαθηματική Σχολή.

#9

Οἱ δύο διασυρστικοί τρόποι ἔκφρασης τοῦ θεωρήματος BUDAN - FOURIER καί οἱ συνέπειές του.

'Αλκιβιάδης Γ. 'Ακρίτας
Πανεπιστήμιο 'Αθηνῶν
Φεβρουάριος 1979.

Τό θέμα μας ἔχει σχέση μέ τήν θεωρία τῶν ἐξισώσεων. Πρίν δέ τό ἀναπτύξουμε θεωροῦμε σκόπιμη μία ἱστορική ἀνασκόπηση, πού θά μᾶς ἐπιτρέψει νά τό τοποθετήσουμε στό σωστό ἱστορικό πλαίσιο καί θά μᾶς βοηθήσει νά κάνουμε μία ὀρθή ἐκτίμησή του.

"Οπως εἶναι γνωστό, οἱ 'Ιταλοί μαθηματικοί τοῦ 15ου καί 16ου αἰῶνα Tartalia, Cardano καί Ferrari ἔκαναν τήν πρώτη σοβαρή ἐργασία στήν θεωρία τῶν ἐξισώσεων, ἐπιτυγχάνοντας νά λύσουν ἀλγεβρικά τίς γενικές ἐξισώσεις 3ου καί 4ου βαθμοῦ. Μετά ἀπό αὐτούς, οἱ μαθηματικοί τοῦ 17ου καί 18ου αἰῶνα ἔκαναν πολλές ἀνεπιτυχεῖς προσπάθειες γιά νά λύσουν μέ τόν ἴδιο τρόπο τήν γενική ἐξίσωση 5ου βαθμοῦ, φυσικό λοιπόν ἦταν νά ἀναρωτηθοῦν ἄν ὑπάρχει μιά τέτοια λύση. Τό 1804 ὁ Ruffini ἀπέδειξε πώς εἶναι ἀδύνατο νά λυθεῖ ἀλγεβρικά ἡ γενική ἐξίσωση 5ου βαθμοῦ καί ἀργότερα, τό 1826, ὁ Abel ἀπέδειξε πώς μέ αὐτόν τόν τρόπο εἶναι ἀδύνατο νά λυθοῦν οἱ γενικές ἐξισώσεις βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 4ου. "Ετσι ἀπό τίς ἀρχές τοῦ 19ου αἰῶνα οἱ μαθηματικοί εἶχαν στρέψει τήν προσοχή τους σέ ἀριθμητικές μεθόδους λύσης τῶν ἐξισώσεων. Τήν περίοδο αὐτή ὁ Fourier συνέλαβε τήν ἰδέα νά διασπάσει τό ὅλο πρόβλημα σέ δύο εὐκολώτερα, δηλ:

1ο) στήν ἀπομόνωση τῶν ριζῶν, καί
2ο) στήν προσέγγισή τους μέ ὅση ἀκρίβεια ἐπιθυμοῦμε.

Τό πρόβλημα τῆς προσέγγισης τῶν ριζῶν ἔχει λυθεῖ ἱκανοποιητικά ἀπό τούς Lagrange, Horner καί Newton καί ἔτσι δέν θά μᾶς ἀπασχολήσει.

Λέγοντας ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν ἑνός πολυώνυμου ἐννοοῦμε τήν διαδικασία μέ τήν ὁποία βρίσκουμε διαστήματα τέτοια ὥστε κάθε ἕνα νά περιέχει μόνο μία ρίζα καί κάθε ρίζα νά περιέχεται σέ κάποιο διάστημα. 'Ο Budan καί ὁ Fourier διατύπωσαν δύο διαφορετικά θεωρήματα (πού εἶναι ὅμως ἰσοδύναμα) μέ τήν βοήθεια τῶν ὁποίων μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν, πού ἔχει ἡ πολυωνυμική ἐξίσωση $P(x) = 0$ μέσα σέ ἕνα διάστημα. Καί τά δύο θεωρήματα χρησιμοποιοῦν τήν ἔννοια τῶν μεταβολῶν προσήμου (σέ μιά ἀριθμητική ἀκολουθία), ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

'<u>Ορισμός 1</u>. Λέμε πώς ὑπάρχει μία μεταβολή προσήμου μεταξύ δύο ἀριθμῶν c_p καί c_g $(p < g)$ μιᾶς πεπερασμένης ἤ ἀπείρου ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν $c_1, c_2, \ldots\ldots$, ἄν c_p καί c_g εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν καί ἔχουν ἀντίθετα πρόσημα, καί στήν περίπτωση πού $g \geq p+2$ (δηλ. ὁ c_g εἶναι ὁ ἄμεσα ἑπόμενος τοῦ c_p) οἱ ἀριθμοί $c_{p+1}, \ldots\ldots, c_{g-1}$ εἶναι ὅλοι μηδέν.

(Στά ἑπόμενα θά λέμε πώς ἕνα πολυώνυμο "ἔχει" ἤ "παρουσιάζει" V μεταβολές προσήμου καί θά παραλείπουμε τήν φράση "στήν ἀκολουθία τῶν συντελεστῶν του". Ἐπίσης οἱ ἀποδείξεις τῶν διαφόρων προτάσεων θά παραλείπονται γιατί ὑπάρχουν στήν βιβλιογραφία).

'Η ἰσοδυναμία πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν θεωρημάτων τοῦ Budan καί τοῦ Fourier ἔγινε ἀφορμή νά ξεχασθεῖ σχεδόν ἐντελῶς τό πρῶτο ἐνῶ τό δεύτερο νά ὀνομάζεται θεώρημα Budan - Fourier ἤ Fourier - Budan. Πρόσφατη ὅμως ἐργασία μᾶς ἔδειξε πώς κάθε ἕνα θεώρημα ἔχει ξεχωριστή σημασία μέ ἐντελῶς διαφορετικές συνέπειες, πρᾶγμα πού θά δοῦμε στήν συνέχεια.

<u>Τό θεώρημα τοῦ Fourier καί ἡ μέθοδος Sturm γιά τήν ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου</u>

Τό θεώρημα τοῦ Fourier ἐμφανίστηκε τό 1831 στό βιβλίο του Analyse des équations, τό ὁποῖο δημοσιεύτηκε μετά τόν θάνατό του ἀπό τόν C.L.M.H. Navier. 'Ο ἀναγνώστης μπορεῖ νά τό βρεῖ διατυπωμένο μέ διαφορετικό τρόπο σέ ὅλα σχεδόν τά βιβλία τά σχετικά μέ τήν θεωρία τῶν ἐξισώσεων μέ τό ὄνομα Budan - Fourier ἤ Fourier - Budan |8|, |10|, |11|, |12|.

'Ο Hurwitz |10| τό παρουσιάζει σάν εἰδική περίπτωση ἑνός πιό γενικοῦ θεωρήματος καί ὁ Obreschkoff (|11| σελ. 76-87) τό γενικεύει γιά μιγαδικές ρίζες. 'Εμεῖς τό παρουσιάζουμε μέ τήν μορφή πού βρίσκεται στό ἄρθρο τοῦ Vincent (|14| σελ. 342).

<u>Θεώρημα 1</u>. (Fourier). Ἄν στήν ἀκολουθία τῶν m + 1 συναρτήσεων

$$(F)\ P(x),\ P^{(1)}(x),\ \ldots\ldots,\ P^{(m)}(x)$$

ἀντικαταστήσουμε τό x μέ δύο πραγματικούς ἀριθμούς p, g $(p<g)$, καί ἄν παραστήσουμε μέ $\bar{P}$, $\bar{Q}$ τίς δύο ἀριθμητικές ἀκολουθίες πού προκύπτουν, τότε:

(i) ἡ ἀκολουθία $\bar{P}$ δέν μπορεῖ νά ἔχει λιγότερες μεταβολές προσήμου ἀπό τήν ἀκολουθία $\bar{Q}$,

(ii) ὁ ἀριθμός τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $P(x) = 0$ πού βρίσκονται μεταξύ p καί g, ποτέ δέν μπορεῖ νά ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό τῶν μεταβολῶν προσήμου πού χάνονται στήν μετάβαση ἀπό τήν ἀντικατάσταση $x = p$ στήν ἀντικατάσταση $x = g$,

(iii) ἄν ὁ πρῶτος ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τόν δεύτερο ἡ διαφορά τους εἶναι ἕνας ἄρτιος ἀριθμός.

$P^{(i)}(x)$ παριστάνει τήν i στήν παράγωγο τοῦ $P(x)$ ὡς πρός x. 'Η ἀκολουθία (F) τῶν m + 1 συναρτήσεων λέγεται <u>ἀκολουθία Fourier</u>. Εἶναι φανερό πώς τό θεώρημα 1 μᾶς δίνει ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν πού ἔχει ἡ ἐξίσωση $P(x) = 0$ μέσα στό διάστημα (p, g).

Ὅπως εἴδαμε προηγούμενα τό θεώρημα τοῦ Fourier δημοσιεύτηκε τό 1831. Σέ χειρόγραφο ὅμως κυκλοφόρησε σέ στενό κύκλο μαθηματικῶν τό 1829. Ἕνας ἀπό τούς μαθηματικούς πού εἶδαν αὐτά τά χειρόγραφα ἦταν καί ὁ Sturm [7], ὁ ὁποῖος στηριζόμενος στό θεώρημα τοῦ Fourier, διατύπωσε μέσα στόν ἴδιο χρόνο (1829) τό δικό του θεώρημα. Μέ τήν βοήθεια τοῦ νέου αὐτοῦ θεωρήματος βρίσκουμε τόν ἀκριβή ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν πού ἔχει ἡ ἐξίσωση $P(x) = 0$ μέσα σέ ἕνα διάστημα. Ἔτσι λύθηκε τό πρόβλημα τῆς ἀπομόνωσης τῶν πραγματικῶν ριζῶν.

Εἶναι γνωστό πώς ὁ Sturm χρησιμοποίησε ἀντί γιά τήν ἀκολουθία (F) τήν ἀκολουθία

$$(S)\ P(x),\ P^{(1)}(x),\ R_1(x),\ \ldots,\ R_k(x),$$

πού λέγεται <u>ἀκολουθία Sturm</u>. Τά $R_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ εἶναι τά ἀρνητικά τῶν ὑπολοίπων πού προκύπτουν ὅταν ἐφαρμόσουμε στά πολυώνυμα $P_{(x)}$ καί $P'_{(x)}$ τόν Εὐκλείδειο ἀλγόριθμο γιά νά βρεθεῖ ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Ἔχουμε δηλ. τίς σχέσεις:

$$\begin{aligned} P(x) &= P^{(1)}(x)Q_1(x) - R_1(x)\\ P^{(1)}(x) &= R_1(x)Q_2(x) - R_2(x)\\ &\vdots\\ R_{k-2}(x) &= R_{k-1}(x)Q_k(x) - R_k(x). \end{aligned}$$

Ἐάν μέ $V(\xi)$ παραστήσουμε τόν ἀριθμό τῶν μεταβολῶν προσήμου στήν ἀκολουθία (S) γιά $x = \xi$, τότε ἰσχύει τό ἀκόλουθο.

<u>Θεώρημα 2</u>. (Sturm 1892). Ἄν ἡ πολυωνυμική ἐξίσωση $P(x)=0$ ἔχει μόνον ἁπλές ρίζες, τότε ὁ ἀριθμός τῶν πραγματικῶν της ριζῶν μέσα στό διάστημα (p, q) εἶναι:

$$V(p) - V(q).$$

Ἡ μέθοδος Sturm γιά τήν ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν εἶναι πολύ ἁπλή: Ὑπολογίζουμε πρῶτα ἕνα ἀπόλυτο πάνω φράγμα, τῶν ριζῶν τῆς $P(x) = 0$, (δηλ. ὅλες οἱ πραγματικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης βρίσκονται μέσα στό διάστημα $(-b, b)$ καί μετά ὑποδιαιροῦμε τό διάστημα $(-b, b)$ μέχρις ὅτου κάθε ὑποδιάστημά του περιέχει μόνο μία ρίζα. Ἀπό τό 1830 ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ μόνη γνωστή καί ἀναφέρεται σέ ὅλα τά σχετικά συγγράμματα. Τό γεγονός ὅτι ἰσχύει γιά πολυώνυμα χωρίς πολλαπλές ρίζες δέν περιορίζει τήν γενικότητα γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση μποροῦμε νά ἀναλύσουμε τό $P(x)$ σέ γινόμενο παραγόντων κάθε ἕνας ἀπό τούς ὁποίους ἔχει μόνο ἁπλές ρίζες,

$$P = \prod_{i=1}^{e} S_i^{\,i}$$

<u>Παράδειγμα 1</u>. Θέλουμε νά ἀπομονώσουμε τίς ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$P(x) = x^3 - 7x + 7 = 0,$$

γιά τήν ὁποία ἔχουμε ὅτι $b = 8$. Ἡ ἀκολουθία (S) στήν περίπτωση αὐτή εἶναι:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 7\\ P^{(1)}(x) &= 3x^2 - 7\\ R_1(x) &= 2x - 3\\ R_2(x) &= 1 \end{aligned}$$

Μέ συνεχή ὑποδιαίρεση τοῦ διαστήματος $(-8, 8)$ καί ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος 2 βρίσκουμε ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης περιέχονται στά διαστήματα

$$(-4, -3),\quad (1, 3/2),\quad (3/2, 2).$$

Ἀρχικά ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου Sturm στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές δέν εἶχε καί τόση ἐπιτυχία. Αὐτό ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι, ὅταν δουλεύουμε μέ ἀκέραιους ἀριθμούς, κατά τήν διάρκεια τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀκολουθίας (S) οἱ συντελεστές τῶν πολυωνύμων γίνονται πολύ μεγάλοι. Αὐτό ἔχει σάν ἀποτέλεσμα νά μήν χωρᾶνε σέ μία ἤ καί δύο λέξεις τῆς μνήμης τοῦ ὑπολογιστῆ, μέ συνέπεια τά λάθη στρογγύλευσης νά εἶναι πολύ μεγάλα. Τό 1978 ὅμως ἡ μέθοδος Sturm προγραμματίστηκε σέ ἕνα "σύστημα ἄλγεβρας γιά ὑπολογιστές" (Computer Algebra System) [9] καί δείχθηκε πώς ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ της εἶναι:

$$(1)\quad O(n^{13}L(|P|_\infty)^3),$$

ὅπου n εἶναι ὁ βαθμός τοῦ πολυώνυμου, καί $L(|P|_\infty)$ τό μῆκος, σέ Bits, τοῦ μεγίστου συντελεστῆ κατά ἀπόλυτο τιμή.

Εὔκολα καταλαβαίνει ὁ ἀναγνώστης πώς ἡ μέθοδος Sturm εἶναι πολύ ἀργή.

Ἔχει ἀποδειχθεῖ [9] πώς ἡ βραδύτητα αὐτή ὀφείλεται στόν ὑπολογισμό τῆς ἀκολουθίας (S). Συνεπῶς γιά τίς ἐφαρμογές χρειάζεται μία ἄλλη μέθοδος πιό γρήγορη, καί τέτοια εἶναι ἡ δική μας πού περιγράφεται στό ἑπόμενο μέρος τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ.

<u>Τό Θεώρημα τοῦ Budan καί ἡ μέθοδος AKRITAS* γιά τήν ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου</u>

Τό θεώρημα Budan ἐμφανίστηκε τό 1807 καί στήν βιβλιογραφία δέν βρίσκεται σχεδόν πουθενά [8], [11], [12], [13]. Ἀπό τόν Vincent ([14] σελ. 342) διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

<u>Θεώρημα 3</u>. (Budan 1807). Ἄν στήν ἐξίσωση $P_{(x)} = 0$ κάνουμε τούς δύο μετασχηματισμούς $x = p + x'$ καί $x = g + x''$, ὅπου p καί g εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί $(p < g)$ τότε:

(i) ἡ μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x' = x - p$ δέν μπορεῖ νά ἔχει λιγότερες μεταβολές προσήμου ἀπό τήν μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x'' = x - g$,

(ii) ὁ ἀριθμός τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $P(x) = 0$, πού βρίσκονται μεταξύ p καί g, ποτέ δέν ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό τῶν μεταβολῶν προσήμου πού χάνονται στήν μετάβαση ἀπό τήν μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x' = x - p$ στήν μετασχηματισμένη ἐξίσωση μέ $x'' = x - g$,

(iii) ἄν ὁ πρῶτος ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τόν δεύτερο, ἡ διαφορά τους εἶναι ἕνας ἄρτιος ἀριθμός.

Ὅπως τό Θεώρημα 1, ἔτσι καί τό Θεώρημα 3 μᾶς δίνει ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν πραγματικῶν ριζῶν πού ἔχει ἡ ἐξίσωση $P(x) = 0$ μέσα στό διάστημα (p, g). Ὁ ἀναγνώστης πρέπει ὅμως νά προσέξει πώς τώρα δέν χρησιμοποιεῖται ἀκολουθία πολυωνύμων ὅπως προηγούμενα, ἀλλά μόνον μετασχηματισμοί τῆς μορφῆς $x = r + y$. Ἡ ἰσοδυναμία τῶν Θεωρημάτων 1 καί 3 φαίνεται ἄν στήν ἀκολουθία (S) ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό α. Τότε οἱ $m + 1$ ἀριθμοί πού προκύπτουν εἶναι ἀνάλογοι μέ τούς ἀντίστοιχους συντελεστές τῆς ἐξίσωσης $P(x + \alpha) = 0$, ἡ ὁποία προκύπτει μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Taylor.

Μέχρι πρίν ἀπό δύο χρόνια ἡ σπουδαιότητα τοῦ θεωρήματος τοῦ Budan δέν εἶχε κατανοηθεῖ ἐντελῶς.

---

* Καλοῦμε μέθοδο Akritas αὐτήν πού ἀναπτύσσεται στά ἑπόμενα καί ἡ ὁποία πρωτοπαρουσιάστηκε μέ τήν ὀνομασία αὐτή στό συνέδριο τῆς Association for Computing Machinery στήν Atlanta, Georgia τῶν Η.Π.Α. τόν Ἀπρίλιο τοῦ 1978. Βλέπε καί τήν ἐργασία μας [2].

Ὅπως θά δοῦμε ὅμως, αὐτό ἀποτελεῖ τήν βάση τοῦ θεωρήματος τοῦ Vincent [14], [13], ἀπό τό ὁποῖο προέρχεται ἡ δική μας μέθοδος γιά τήν ἀπομόνωση τῶν ριζῶν. Προτοῦ διατυπώσουμε τό θεώρημα τοῦ Vincent ὑπενθυμίζουμε ὁρισμένες γνωστές προτάσεις πού εἶναι σχετικές μέ αὐτό.

<u>Θεώρημα 4</u> (Cardano - Descartes). Ἔστω τό πολυώνυμο

$$P(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + C_1 x - C_0$$

μέ πραγματικούς συντελεστές. Ἄν V εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μεταβολῶν τοῦ προσήμου στήν ἀκολουθία τῶν συντελεστῶν C_n, C_{n-1}, ..., C_1, C_0 τοῦ προσήμου p ὁ ἀριθμός τῶν θετικῶν ριζῶν τοῦ πολυώνυμου $P_{(x)}$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση

$$V - p = 2\lambda,$$

ὅπου $\lambda \geq 0$ καί ἀκέραιος.

Ὕστερα ἀπό προσεκτική μελέτη βλέπουμε ὅτι τό θεώρημα 4 εἶναι μία ὄχι καί τόσο ἰσχυρή πρόταση, γιατί δίνει τόν ἀκριβῆ ἀριθμό τῶν ριζῶν μόνο στίς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

(i) ἄν δέν ὑπάρχει μεταβολή προσήμου δέν ὑπάρχει θετική ρίζα, καί

(ii) ἄν ὑπάρχει μία μεταβολή προσήμου ὑπάρχει μία θετική ρίζα.

Εὔκολα συμπεραίνουμε πώς τό ἀντίστροφο τῆς (i) ἰσχύει πάντοτε, ἐνῶ γιά τό ἀντίστροφο τῆς (ii) ἰσχύει τό ἀκόλουθο:

<u>Λῆμμα 1</u> (Ἀκρίτας - Δανιηλόπουλος [5]). Ἔστω P(x)=0 μία πολυωνυμική ἐξίσωση n > 1, χωρίς πολλαπλές ρίζες πού ἔχει μία θετική ρίζα $\xi \neq 0$ καί n - 1 ρίζες ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1} μέ ἀρνητικό πραγματικό μέρος (οἱ μιγαδικές ρίζες ἐμφανίζονται σάν συζυγῆ ζεύγη) οἱ ὁποῖες ἔχουν τήν μορφή

$$\xi_j = -(1 + \alpha_j), \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, n - 1$$

μέ $|\alpha_j| < \varepsilon_n$, ὅπου

$$\varepsilon_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1.$$

τότε τό πολυώνυμο P(x), στήν ἀναλυτική του μορφή παρουσιάζει ἀκριβῶς μία μεταβολή προσήμου.

Οἱ προηγούμενες δύο εἰδικές περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος τῶν Cardano - Descartes χρησιμοποιοῦνται στό θεώρημα τοῦ Vincent πού ἔχει ὡς ἑξῆς:

<u>Θεώρημα 5</u>. (Vincent 1836 [14]). Ἄν σέ μία πολυωνυμική ἐξίσωση μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες κάνουμε διαδοχικά τούς μετασχηματισμούς

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x'}, \; x' = \alpha_2 + \frac{1}{x''}, \quad x'' = \alpha_3 + \frac{1}{x'''}, \; \ldots\ldots$$

ὅπου τά α_i εἶναι τυχαῖοι, ἀκέραιοι, θετικοί ἀριθμοί, τότε ἡ τελική, μετασχηματισμένη ἐξίσωση ἔχει μία ἤ καμμία μεταβολή προσήμου.

Στήν πρώτη περίπτωση ἡ ἐξίσωση ἔχει μία θετική ρίζα πού παριστάνεται ἀπό τό συνεχές κλάσμα

$$\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \ddots}}$$

ἐνῶ στήν δεύτερη περίπτωση δέν ἔχει καμμία θετική ρίζα.

Τό θεώρημα 5 ὑπαινίχθηκε ἀπό τόν Fourier, καί ὁ Vincent ἐκφράζει τήν ἔκπληξή του ὅτι ὁ πρῶτος δέν τό ἀπέδειξε, (ἤ καί ἄν τό ἔκανε, ὅτι ἡ ἀπόδειξη δέν βρέθηκε στίς σημειώσεις του). Τό θεώρημα τοῦ Vincent εἶχε τόσο πολύ ξεχαστεῖ ὥστε δέν ἀναφέρεται οὔτε στήν μνημειώδη ἐργασία Enzyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften. Ὁ συγγραφέας αὐτοῦ τοῦ ἄρθρου τό βρῆκε στό βιβλίο τοῦ Uspensky ([13] σελ. 127-137) καί τό ξανάφερε στήν ἐπικαιρότητα [4].

Ἡ ἐξάρτηση τοῦ θεωρήματος τοῦ Vincent ἀπό τό θεώρημα τοῦ Budan φαίνεται ἄν κάθε ἕνας μετασχηματισμός τῆς μορφῆς $x = \alpha_i + \frac{1}{y}$ ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό ἰσοδύναμο ζεῦγος μετασχηματισμῶν $x = i + y'$, $y' = \frac{1}{y}$. Μετά ἀπό λίγη σκέψη (βλέπε καί τό παράδειγμα 2 πού ἀκολουθεῖ) φαίνεται πώς ὅταν ἡ τελική μετασχηματισμένη ἐξίσωση (τοῦ θεωρήματος 5) ἔχει μόνο μία μεταβολή προσήμου, μποροῦμε νά ἀπομονώσουμε μία θετική ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης, οἱ ἀρνητικές ρίζες ἐξετάζονται ἀφοῦ γίνουν πρῶτα θετικές μέ τήν ἀντικατάσταση τοῦ x ἀπό τό $-x$ στήν ἀρχική ἐξίσωση.

Τό μόνο πού δέν ἀναφέρει καθόλου τό θεώρημα τοῦ Vincent εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μετασχηματισμῶν πού πρέπει νά γίνουν γιά νά ἀποκτήσουμε τό τελικό πολυώνυμο μέ μία, τό πολύ, μεταβολή προσήμου. Ὁ Uspensky ([13] σελ. 298 - 303) ἐπιχείρησε νά δώσει ἀπάντηση σέ αὐτό τό ἐρώτημα ἐπεκτείνοντας τό θεώρημα τοῦ Vincent. Ἡ προσπάθειά του ὅμως ἀπέτυχε μερικῶς γιατί τό νέο θεώρημα εἶχε λάθη στήν διατύπωση καί ἀπόδειξη. Ἐμεῖς διορθώσαμε τά λάθη αὐτά [3] καί ἔτσι ἔχουμε τό ἀκόλουθο:

Θεώρημα 6. (Vincent - Uspensky - Akritas). Ἔστω $P(x) = 0$ μία πολυωνυμική ἐξίσωση βαθμοῦ $n > 1$ μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες, καί ἔστω $\Delta > 0$ ἡ μικρότερη ἀπόσταση μεταξύ δύο τυχαίων ριζῶν. Ἔστω m ὁ μικρότερος δείκτης, ὥστε

$$F_{m-1}\ \frac{\Delta}{2} > 1 \quad \text{καί} \quad F_{m-1}\ F_m\ \Delta > 1 + \frac{1}{\varepsilon_n}$$

ὅπου F_k εἶναι τό k στό μέλος τῆς ἀκολουθίας Fibonacci

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

καί $\varepsilon_n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}} - 1$.

Τότε ὁ μετασχηματισμός

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 +} \ddots + \frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\xi},$$

ὅπου τά α_i εἶναι τυχαῖοι, θετικοί, ἀκέραιοι ἀριθμοί μετασχηματίζει τήν ἐξίσωση $P(x) = 0$ στήν ἐξίσωση $\tilde{P}(\xi) = 0$, ἡ ὁποία ἔχει τό πολύ μία μεταβολή προσήμου.

Ἀπό τό θεώρημα αὐτό φαίνεται πώς τό m εἶναι ἕνα πάνω φράγμα στόν ἀριθμό τῶν μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς

$$x = \alpha_i + \frac{1}{y}$$

πού πρέπει νά γίνουν, ὥστε ἡ τελική ἐξίσωση νά ἔχει τό πολύ

μία μεταβολή προσήμου. Ἔχουμε δείξει δέ ([1] σελ.72-73) ὅτι

$$m = 0\ (nL(|P|_\infty)). \tag{2}$$

Τό θεώρημα 6 μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τήν ἀπομόνωση τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $P(x) = 0$. Ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν α_i, $1 \leq i \leq m$ - γιά τούς μετασχηματισμούς πού καταλήγουν σέ πολυώνυμο μέ μία μεταβολή προσήμου - συνιστᾶ τήν μέθοδο ἀπομόνωσης τῶν ριζῶν. Ἀπό τό θεώρημα 6 ἀπορρέουν δύο μέθοδοι, οἱ τῶν Vincent καί Akritas, πού ἀντιστοιχοῦν στούς δύο διαφορετικούς τρόπους ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν α_i. Ἡ διαφορά τῶν δύο αὐτῶν μεθόδων, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἀνάλογη μέ τήν διαφορά πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ Riemann καί Lebesgue.

Μέ τήν μέθοδο Vincent ὑπολογίζουμε τίς τιμές γιά κάθε ἕνα ἀπό τά α_i μέ μοναδιαῖες αὐξήσεις $\alpha_i \leftarrow \alpha_i + 1$. Ἀποτέλεσμα αὐτοῦ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν α_i εἶναι ὅτι ἡ ἀντίστοιχη μέθοδος ἔχει ἐκθετική συμπεριφορά. Δηλαδή γιά ἀρκετά μεγάλες τιμές τῶν α_i θά χρειαστεῖ πολύς χρόνος γιά τήν απομόνωση τῶν ριζῶν (μπορεῖ νά χρειαστοῦν χρόνια ἀκόμα καί μέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή). Ἔτσι βλέπουμε πώς ἡ μέθοδος Vincent ἔχει λίγη πρακτική σημασία.

Ὁ δεύτερος τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν α_i ὀφείλεται στόν γράφοντα, πού πρῶτος μελέτησε τήν φύση τῶν α_i καί κατέληξε στό συμπέρασμα ὅτι κάθε ἕνα ἀπό αὐτά εἶναι τό κάτω φράγμα b τῶν θετικῶν ριζῶν ἑνός πολυώνυμου (ὑποθέτουμε πώς $b = \lfloor \alpha_s \rfloor$, ὅπου α_s εἶναι ἡ μικρότερη θετική ρίζα).

Ἡ ἑρμηνεία αὐτή τῶν α_i γίνεται φανερή ἄν πρῶτα διατυπώσουμε τόν ἀντικειμενικό μας σκοπό. Διαισθητικά μιλώντας, ὁ σκοπός τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς $x = \alpha_i + \frac{1}{y}$, πού γίνονται στήν ἐξίσωση $P(x) = 0$, εἶναι γιά νά μπεῖ μία ἀπό τίς θετικές της ρίζες στό διάστημα $(0,1)$ καί ὅλες οἱ ἄλλες στό διάστημα $(1,\infty)$ ἤ ἀντίστροφα - ἐξαιρώντας φυσικά τήν περίπτωση πού τό 1 εἶναι μία ρίζα. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ ἐφαρμογή στήν συνέχεια τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = \frac{1}{1+y}$ καταλήγει σέ μιά ἐξίσωση μέ μόνο μία ρίζα στό διάστημα $(0,\infty)$, ἐνῶ γιά τήν δεύτερη περίπτωση τό ἴδιο ἐπιτυγχάνεται μέ τήν ἐφαρμογή στήν συνέχεια τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = 1 + y$. Τό ἑπόμενο Λῆμμα εἶναι σχετικό.

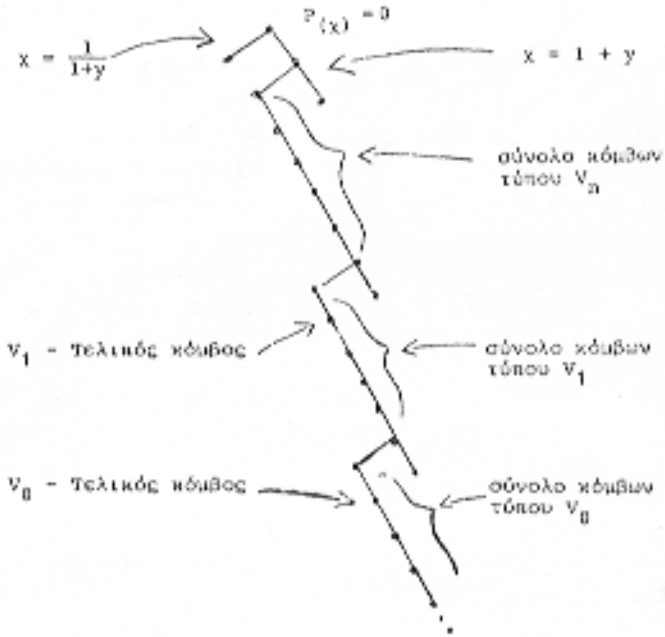
<u>Λῆμμα 2.</u> ('Ακρίτας, [1] σελ. 118 - 119). 'Εστω $P(x) = 0$ μία πολυωνυμική ἐξίσωση χωρίς πολλαπλές ρίζες, μέ ἀκέραιους συντελεστές, βαθμοῦ $n \geq 2$, ἡ ὁποία ἔχει p πραγματικές ρίζες στό διάστημα $(0,1)$, $2 \leq p \leq n$, καί ἔστω $\Delta_p > 0$ ἡ μικρότερη ἀπόσταση μεταξύ δύο τυχαίων ἀπό αὐτές. Τότε ὁ μετασχηματισμός $x = \frac{1}{y}$ πού γίνεται στήν $P(x) = 0$, ἀπεικονίζει τις p
ρίζες στό διάστημα $(1,\infty)$, ὅπου τώρα ἡ μικρότερη ἀπόσταση μεταξύ δύο τυχαίων ἀπό αὐτές εἶναι $\Delta'_p > \Delta_p$.

Αὐτό τό Λῆμμα μᾶς δείχνει πῶς γιά τήν ἐκπλήρωση τοῦ ἀντικειμενικοῦ μας σκοποῦ πρέπει νά κάνουμε τό ἑξῆς: ὅποτε ὑπάρχουν περισσότερες ἀπό μία πραγματικές ρίζες στό διάστημα $(0,1)$, πρῶτα τίς ἀντιστρέφουμε γιά νά ἀραιώσουν μεταξύ τους καί μετά τίς μεταφέρουμε πρός τό 0 μέ τήν ἐλπίδα πώς τώρα θά μποῦν στό διάστημα $(0,1)$ μία - μία. Μέ αὐτήν τήν σκέψη καταλήγουμε λοιπόν στήν ἑρμηνεία τῶν α_i σάν τό κάτω φράγμα τῶν θετικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου. Γιά μιά πιό πλήρη κατανόηση ὅμως τοῦ ὅλου θέματος πρέπει νά εἰσάγουμε ὁρισμένες καινούργιες ἔννοιες.

Θεωροῦμε ἕνα μή πεπερασμένο δυαδικό δένδρο μέ τήν κορυφή τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχοῦμε τήν ἐξίσωση τῆς ὁποίας θέλουμε νά ἀπομονώσουμε τίς θετικές ρίζες. Κάθε κόμβος τοῦ δένδρου αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ μέ μία μετασχηματισμένη ἐξίσωση πού προκύπτει ἀπό τήν ἀρχική μετά ἀπό διαδοχική ἐφαρμογή μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς $x = \alpha + \frac{1}{y}$.

'Η πορεία ἀπό ἕνα κόμβο πρός τόν δεξιό του ἀπόγονο ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς $x = 1 + y$, ἐνῶ ἡ πορεία πρός τόν ἀριστερό του ἀπόγονο ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς $x = \frac{1}{1+y}$ ([1] σελ. 74-82). Συνεπῶς μία πορεία ἀπό τήν κορυφή τοῦ δένδρου πρός κάποιο κόμβο ἀντιστοιχεῖ μονοσήμαντα σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς

$$x = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_n + \cfrac{1}{\xi}}}}.$$



<u>Σχήμα 1</u>

Σέ μιά τυχαία πορεία ὅλοι οἱ κόμβοι θά θεωροῦνται ὅτι ἀνήκουν σέ ἕνα ἀπό τά ἑξῆς τρία σύνολα (Σχῆμα 1):

(α) Σύνολο κόμβων τύπου V_n, ὅπου οἱ ἐξισώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στούς κόμβους ἔχουν περισσότερες ἀπό μία μεταβολές προσήμου.

(β) Σύνολο κόμβων τύπου V_1, ὅπου οἱ ἐξισώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στούς κόμβους ἔχουν μία μεταβολή προσήμου· ὁ "πρῶτος" κόμβος σέ ἕνα τέτοιο σύνολο καλεῖται V_1 - τελικός κόμβος.

(γ) Σύνολο κόμβων τύπου V_0, ὅπου οἱ ἐξισώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στούς κόμβους δέν ἔχουν μεταβολή προσήμου· ὁ "πρῶτος" κόμβος σέ ἕνα τέτοιο σύνολο καλεῖται V_0 - τελικός κόμβος.

Εὔκολα ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι τά σύνολα τῶν δύο πρώτων τύπων ἔχουν πεπερασμένο πλῆθος κόμβων, ἐνῶ τά σύνολα τύπου V_0 ἔχουν ἄπειρο πλῆθος κόμβων. Ἕνα σύνολο τύπου V_0 πάντοτε "ἀκολουθεῖ" ἕνα σύνολο τύπου V_1 ἤ V_n, ἐνῶ τό σύνολο τύπου V_1 ἤ V_n ποτέ δέν "ἀκολουθεῖ" ἕνα σύνολο τύπου V_0· ὅμοια ἔχουμε πώς ἕνα σύνολο τύπου V_n ποτέ δέν "ἀκολουθεῖ" ἕνα σύνολο τύπου V_1.

Γιά νά ἀπομονώσουμε λοιπόν τίς πραγματικές θετικές ρίζες τῆς $P(x) = 0$, πρέπει στό δυαδικό δένδρο νά ἀκολουθοῦμε πορεῖες πού μᾶς ὁδηγοῦν σέ V_1-τελικούς κόμβους. Μέ αὐτές τίς ἔννοιες μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι μέ τήν μέθοδο Vincent φθάνουμε στόν V_1 - τελικό κόμβο μέ μοναδιαῖα ("ἅλματα", πού κάθε ἕνα ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς

$$x = 1 + y$$

(ἤ ἰσοδύναμα στήν αὔξηση $a_i \leftarrow a_i + 1$ γιά κάποιο i) ἐνῶ ἀντίθετα μέ τήν δική μας μέθοδο, φθάνουμε στόν V_1-τελικό κόμβο μέ "ἅλματα" πού κάθε ἕνα ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα μετασχηματισμό τῆς μορφῆς

$$x = \underline{b} + y, \quad \underline{b} \geq 1$$

(ἤ ἰσοδύναμα στόν ἄμεσο ὑπολογισμό κάποιου a_i σάν τό κάτω φράγμα, $\underline{b}$, τῶν θετικῶν ριζῶν πολυωνύμου, δηλ. $a_i \leftarrow \underline{b}$ γιά κάποιο i). Ἡ γεωμετρική εἰκόνα δίνεται ἀπό τό Σχῆμα 2

Σχῆμα 2

Ἔχουμε δέ δείξει [6] ὅτι ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = b + y$, $b > 1$, εἶναι

(3) $$O(n^3 L(b)^2 + n^2 L(b) L(|P|_\infty)),$$

πού εἶναι σχεδόν ὁ ἴδιος μέ τόν χρόνο ὑπολογισμοῦ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = 1 + y$.

Εὔκολα τώρα συμπεραίνουμε πώς ἡ μέθοδος Vincent ἔχει ἐκθετική συμπεριφορά ὅταν οἱ τιμές τῶν a_i εἶναι ἀρκετά μεγάλες, ἐνῶ ἡ δική μας μέθοδος εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό αὐτές.

Μία ἀναγωγική (Recursive) περιγραφή τῆς μεθόδου μας γιά τήν ἀπομόνωση τῶν θετικῶν ριζῶν εἶναι ἡ ἑξῆς: (Οἱ λεπτομέρειες θά φανοῦν ἀπό τό παράδειγμα πού ἀκολουθεῖ).

Μέθοδος Akritas

Ἔστω ἡ πολυωνυμική ἐξίσωση

(4) $$P(x) = 0$$

μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες, ἡ ὁποία παρουσιάζει V μεταβολές προσήμου.

Περίπτωση 1η. Ἐάν V = 0 ἤ V = 1 ἡ μέθοδος τερματίζει.

Περίπτωση 2η. Ἐάν V > 1 ὑπολογίζουμε πρῶτα τό κάτω φράγμα $\underline{b}$ τῶν θετικῶν ριζῶν καί ὕστερα τήν ἐξίσωση

$$P_{\underline{b}}(x) = P(\underline{b} + x) = 0$$

ἡ ὁποία ἔχει ἐπίσης V μεταβολές προσήμου ἄν $P(\underline{b}) \neq 0$.

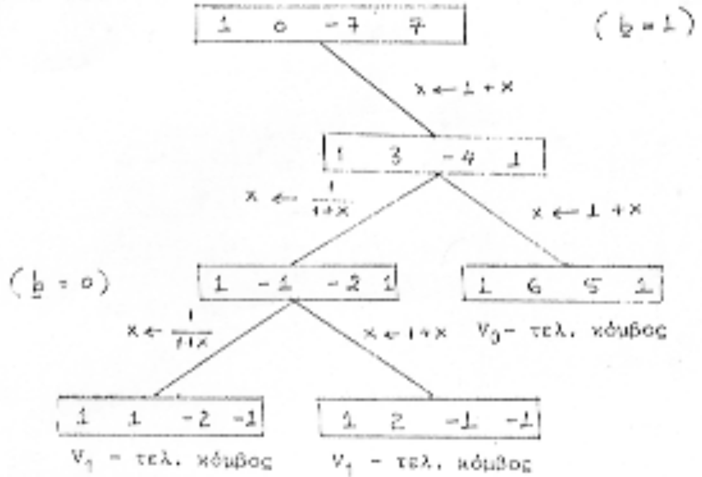
Στήν συνέχεια ἡ μέθοδός μας ἐφαρμόζεται δύο φορές· μία φορά μέ τήν ἐξίσωση $P_{\underline{b}}(\frac{1}{1+x}) = 0$ ἀντί τῆς (4), καί μία φορά μέ τήν ἐξίσωση $P_{\underline{b}}(1 + x) = 0$.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $\underline{b} = [a_s]$, ὅπου a_s εἶναι ἡ μικρότερη θετική ρίζα. Ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ τοῦ $\underline{b}$ εἶναι $O(n^2 L(|P|_\infty))$.

Παράδειγμα 2. Θέλουμε νά ἀπομονώσουμε τίς θετικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$P(x) = x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Ἐφαρμόζοντας τήν μέθοδό μας προκύπτει τό ἀκόλουθο δυαδικό δένδρο στό ὁποῖο γράφουμε μόνον τούς συντελεστές τῶν ἐξισώσεων (Σχῆμα 3). Ἡ ἀντικατάσταση $x \leftarrow \frac{\alpha+x}{\beta+x}$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τόν μετασχηματισμό $x = \frac{\alpha+y}{\beta+y}$.



Σχῆμα 3

Γιά νά προκύψει ἡ ἐξίσωση $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ ἔγινε ὁ μετασχηματισμός $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+t}}$.

Ἀντικαθιστώντας τό t πρῶτα μέ τό 0 καί μετά μέ τό ∞ προκύπτει τό διάστημα $(\frac{3}{2}, 2)$ τό ὁποῖο ἀπομονώνει μία θετική ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ ἔγινε ὁ μετασχηματισμός $x = 1 + \frac{1}{2+t}$, ἀπ'ὅπου προκύπτει τό διάστημα $(1, \frac{3}{2})$ τό ὁποῖο ἀπομονώνει τήν δεύτερη θετική ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης.

Γιά νά ἀποδείξουμε τόν χρόνο ὑπολογισμοῦ τῆς μεθόδου μας χρειαζόμαστε ἕνα πάνω φράγμα γιά τίς τιμές τῶν ποσοτήτων a_i πού μᾶς ὁδηγοῦν σέ V_0 ἤ V_1 - τελικούς κόμβους. Αὐτό δίνεται ἀπό τό ἑξῆς:

Θεώρημα 7 (Ἀκρίτας,[1] σελ. 77-81). Ἔστω $P(x) = 0$ μία πολυωνυμική ἐξίσωση βαθμοῦ $n > 1$, μέ ρητούς συντελεστές καί χωρίς πολλαπλές ρίζες, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ μέ τήν κορυφή τοῦ δυαδικοῦ δένδρου. Ἐκτός αὐτοῦ ἔστω ὅτι ὁ μετασχηματισμός

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_\ell + \frac{1}{t}}}},$$

ὅπου τά a_i εἶναι θετικοί ἀκέραιοι ἀριθμοί, $1 \le i \le n$, μετασχηματίζει τήν ἐξίσωση $P(x) = 0$ σέ μία ἄλλη πού ἀντιστοιχεῖ μέ V_0 ἤ V_1 τελικό κόμβο. Τότε γιά κάθε k, $1 \le k \le \ell$ ἰσχύει

(5) $$a_k \le |P|_\infty .//$$

Μέ τήν βοήθεια τῶν (2), (3) καί (5) εὔκολα προκύπτει ὅτι ὁ χρόνος ὑπολογισμοῦ τῆς μεθόδου Akritas εἶναι

(6) $$0(n^5 L(|P|_\infty)^3)).$$

Συγκρίνοντας τίς (1) καί (6) βλέπουμε ὅτι ἡ μέθοδός μας εἶναι ταχύτατη καί ἐκτός αὐτοῦ διαφέρει ἀπό τήν μέθοδο Sturm γιατί χρησιμοποιεῖ συνεχῆ κλάσματα.

Παραθέτουμε τώρα ἕνα πίνακα ὅπου φαίνεται ἡ συντριπτική ὑπεροχή τῆς μεθόδου μας.

Πολυώνυμα μέ τυχαῖα παραχθέντες συντελεστές

Βαθμός	Sturm	Akritas
5	2.85	.26
10	33.28	.26
15	156.40	.94
20	524.42	2.36

Πίνακας 1

Ὅλοι οἱ συντελεστές τῶν πολυωνύμων ἦταν διάφοροι ἀπό τό μηδέν, ἀκέραιοι καί μέ δέκα ψηφία καθένας. Οἱ χρόνοι εἶναι σέ δευτερόλεπτα καί ἀποκτήθηκαν μέ τήν χρησιμοποίηση τοῦ συστήματος SAC - 1 στόν ὑπολογιστή IBM S/370 Model 165 πού βρίσκεται στό Triangle Universities Computation Center, North Carolina, U.S.A.

'Επομένως βλέπουμε ότι τό θεώρημα τοῦ Budan, πού ἦταν άγνοημένο μέχρι πρό δύο χρόνων είναι μεγάλης σημασίας, καί σάν τέτοιο πρέπει νά καταλάβει τήν θέση πού τοῦ ἁρμόζει στήν Ιστορία τῶν Μαθηματικῶν.

Σέ αὐτό τό ἄρθρο εἴδαμε ὅτι ἀποτελεῖ τήν βάση τῆς μεθόδου μας ἡ ὁποία εἶναι ἀσύγκριτα καλλίτερη ὄχι μόνον τῆς ἀπό 150 χρόνων γνωστῆς μεθόδου Sturm ἀλλά καί ὅλων τῶν ἄλλων πού ἀναπτύχθηκαν πρόσφατα, ([1] σελ. 4 - 8), [2].

1. Akritas, A.G., "Vincent's Theorem in Algebraic Manipulation", Ph. D. Thesis, Operations Research Program, North Carolina State University, Raleigh, N.C., 1978.

2. Akritas, A.G., "A New Method for Polynomial Real Root Isolation", Proceedings of the 16th Annual Southeast Regional ACM Conference, Atlanta, Georgia, April 1978, 39--43 (this paper received the First Prize in the Student Paper Competition).

3. Akritas, A.G., "A Correction on a Theorem by Uspensky", Bulletin of the Greek Mathematical Society, Vol. 19, 278--285, 1978.

4. Akritas, A.G. and S.D. Danielopoulos, "On the Forgotten Theorem of Mr. Vincent", Historia Mathematica, in press.

5. Akritas, A.G. and S.D. Danielopoulos, "On a Special Case of the Cardano-Descartes Rule of Signs", submitted for publication.

6. Akritas, A.G. and S.D. Danielopoulos, "On the Complexity of Algorithms for the Translation of Polynomials", Computing, to appear.

7. Bôcher, M., "The Published and Unpublished Work of Charles Sturm on Algebraic and Differential Equations", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 16, 1--18, 1911.

8. Burnside, W.S. and A.W. Panton, "The Theory of Equations", Dover, New York, Second Edition, 1960, Vol. 1.

9. Heindel, L.E., "Integer Arithmetic Algorithms for Polynomial Real Zero Determination", Journal of the ACM, Vol. 18, 1971, 533 - 548.

10. Hurwitz, A., "Ueber den Satz von Budan-Fourier", Mathematische Annalen, Vol. 71, 1912, 584 - 591.

11. Obreschkoff, N., "Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

12. Turnbull, H.W., "Theory of Equations", Oliver and Boyd, Edinburg and London, Fifth Edition, 1957.

13. Uspensky, J.V., "Theory of Equations", McGraw-Hill, New York, 1948.

14. Vincent, M., "Sur la Résolution des Equations Numeriques", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 1, 1836, 341 - 372.

ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕ ΑΛΛΟΥΣ ΤΟΜΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ἐμμανουήλ Σμυρνέλης
Πανεπιστήμιον Ἰωαννίνων
Μάρτιος 1979

Εἰσαγωγή

Ἡ μελέτη διαφόρων προβλημάτων τῆς Φυσικῆς ὡδήγησε σέ ὡρισμένες διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους πού ἐξετάζοντάς τες φθάσαμε στή ταξινόμησή τους. Ἔτσι ἐξισώσεις πού παρουσιάζουν μεταξύ τους μικρές διαφορές ἀντιστοιχοῦν σέ ἐντελῶς διαφορετικά προβλήματα, ὅπως π.χ. (στό ἐπίπεδο):

ἡ ἐξίσωση τοῦ Laplace: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$

ἡ ἐξίσωση θερμότητος: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$

ἡ ἐξίσωση κύματος: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$

θά ἀσχοληθοῦμε ἐδῶ μέ τή πρώτη ἀπ'αὐτές πού εἶναι στενά συνδεδεμένη μέ τή μελέτη τῆς βαρύτητος καί τήν ἠλεκτροστατική πού προκάλεσαν τή γέννηση τῆς θεωρίας δυναμικοῦ.

Ἔτσι λοιπόν ἡ θεωρία δυναμικοῦ ἀποτελοῦσε στήν ἀρχή μέρος τῆς μαθηματικῆς φυσικῆς καί τίς ἀρχές της μποροῦμε νά τίς τοποθετήσουμε χρονολογικά στό 18^{ον} αἰῶνα ὅταν ὁ Lagrange παρατήρησε ὅτι οἱ ἑλκτικές δυνάμεις τῆς βαρύτητος (στό χῶρο τῶν τριῶν διαστάσεων) εἶναι ἴσες μέ τό gradient μιᾶς συν-