

Το Σύστημα Υπολογιστικής Άλγεβρας Xcas ως Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Αλκιβιάδης Ακρίτας, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Η/Υ
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
Κυριακή Τσιλικά, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Λέξεις κλειδιά: λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, ορθόκεντρο, βαρύκεντρο
τριγώνου, δυναμικές γεωμετρικές κατασκευές

Εισαγωγή

Σύμφωνα με την αρχή της Δυναμικής Γεωμετρίας, αντικείμενα όπως σημεία, ευθείες και επίπεδα σχήματα σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας σχετίζονται μεταξύ τους με γεωμετρικούς περιορισμούς όπως, όταν οποιοδήποτε από τα αντικείμενα σύρονται (drag) τα άλλα αντικείμενα δυναμικά ανανεώνουν τον εαυτό τους έτσι ώστε οι περιορισμοί να διατηρούνται. Το σύρσιμο (dragging), το οποίο είναι η καρδιά της δυναμικής γεωμετρίας, απελευθερώνει ένα σχήμα από τον συμβατικό του ρόλο που είναι η αναπαράσταση ή η τυπική περίπτωση, και μετατρέπεται σε μία γενική περίπτωση στην οποία αναφέρονται τα Μαθηματικά (Jackiw, 1996). Οι διδακτικοί των μαθηματικών ισχυρίζονται ότι το δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό που έχει αναπτυχθεί πρόσφατα, αποτελεί την πιο σημαντική εξέλιξη στη γεωμετρία από την εποχή του Ευκλείδη. (Davis, 1995 ; Oldknow, 1995; Τουμάσης Αρβανίτης, 2003).

Το δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον που προτείνουμε, παρέχεται μέσα από το ελεύθερο σύστημα Xcas, λογισμικό γνωστό και ως ελβετικός σουγιάς των μαθηματικών, λόγω των πολλαπλών μαθηματικών δυνατοτήτων του. Το Xcas επιτρέπει στο χρήστη να δημιουργεί γεωμετρικές κατασκευές σε δύο και τρεις διαστάσεις και να τις μεταχειρίζεται δυναμικά. Επιπλέον, μπορεί να παράγει γεωμετρικές κατασκευές ως αποτέλεσμα προγραμματιστικών διαδικασιών και να επεξεργάζεται εικόνες σε .png και .jpg αρχεία. Έτσι, το Xcas καλύπτει όλες τις απαιτήσεις που ανακύπτουν δουλεύοντας σε σχέδια εργασίας γεωμετρίας.

Τα γεωμετρικά εργαλεία του Xcas, χρησιμοποιούνται σε μια κατασκευή τριγώνου με το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρό του, όπου, με σύρσιμο μεταβάλλουμε τη μορφή του τριγώνου, μέχρι να πετύχουμε την ταύτιση βαρύκεντρου και ορθόκεντρου. Η εφαρμογή αυτή πετυχαίνει τη διερεύνηση και επαγωγική επαλήθευση τριών θεωρημάτων: 1) τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα κοινό σημείο, 2) οι διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα κοινό σημείο και 3) ορθόκεντρο και βαρύκεντρο ταυτίζονται στο ισόπλευρο τρίγωνο. Η εφαρμογή υλοποιείται στο Xcas με δύο διαφορετικές μεθόδους: με χρήση του ποντικιού και με χρήση εντολών. Η μέθοδος με το ποντίκι έχει το πλεονέκτημα ότι είναι φιλική προς το χρήστη και προσομοιάζει με την τεχνική του σχεδιασμού με χαρτί και μολύβι, με την επιπλέον δυνατότητα κίνησης της κατασκευής. Η μέθοδος κατασκευής με εντολές, εξοικειώνει το χρήστη με τη φιλοσοφία των CAS λογισμικών (computer algebra systems), ανοίγοντας τους

ορίζοντές του για χρήση του Xcas και σε υπολογιστικές ή προγραμματιστικές εφαρμογές μαθηματικού λογισμού.

Σε σχέση με άλλα γνωστά λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, η χρήση του Xcas παρέχει όλες τις συνήθεις κατασκευαστικές δυνατότητες και μας επιτρέπει να μεταβάλλουμε το τρίγωνο ώστε να παρατηρούμε τις μεταβολές των θέσεων ορθόκεντρου και βαρύκεντρου και, να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι ορθόκεντρο και βαρύκεντρο συμπίπτουν μόνο στο ισόπλευρο τρίγωνο.

Η οργάνωση της εργασίας έχει ως εξής. Στην πρώτη ενότητα ορίζεται η έννοια της δυναμικής γεωμετρίας. Στη δεύτερη ενότητα δίνονται οι βασικές πληροφορίες για το σύστημα Xcas. Στην τρίτη ενότητα περιγράφονται τα γεωμετρικά περιβάλλοντα του Xcas, ενώ στην τέταρτη ενότητα προτείνονται ορισμένες ενδιαφέρουσες δυνατότητες του προγράμματος, σχετικές με γεωμετρικές εφαρμογές. Στην πέμπτη ενότητα παρουσιάζεται μια εφαρμογή δυναμικής γεωμετρίας ως οδηγός χρήσης για τα γεωμετρικά εργαλεία του Xcas. Η έκτη ενότητα συνοψίζει όλα τα παραπάνω.

Τι είναι η Δυναμική Γεωμετρία

Η αρχή της δυναμικής γεωμετρίας προβλέπει τη μετακίνηση και το μετασχηματισμό γεωμετρικών αντικειμένων με τη βοήθεια του ποντικιού, με την κατασκευή να ανταποκρίνεται δυναμικά στις νέες συνθήκες ενώ διατηρεί τις ιδιότητές της. Ο όρος δυναμική γεωμετρία οφείλεται στους Jackiw και Rasmussen, για να χαρακτηρίσει το βασικό χαρακτηριστικό που διακρίνει τα λογισμικά που είναι ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων που αποκαλείται «σύρσιμο». Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στους χρήστες, αφού κάνουν μια κατασκευή, να κινήσουν ορισμένα στοιχεία του σχήματος ελεύθερα για να παρατηρήσουν άλλα στοιχεία του σχήματος πώς αποκρίνονται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές. Καθώς αυτά τα στοιχεία μεταβάλλονται το λογισμικό διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής, και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών ([κεφ. 5]).

Η χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας επιτρέπει πειραματικές τεχνικές διερεύνησης, έλεγχο ιδιοτήτων και πολλαπλές αναπαραστάσεις γεωμετρικών κατασκευών. Την εκπαιδευτική αξία των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας έχουν επισημάνει αρκετοί διδακτολόγοι (π.χ. [Πιπτάλης], [Τουμάσης Μπ., Αρβανίτης], Davis, Oldknow, Scher, Χρίστου Πίττα). Μερικά διαδεδομένα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας είναι τα Geometric Supposer, Cabri Geometer, Geometer's SketchPad, EucliDraw, Geogebra, Cinderella, C.a.R., Geonext (βλ. χρήσιμοι σύνδεσμοι), κάποια από τα οποία έχουν ενταχθεί στη διδακτική διαδικασία της ελληνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζεται το μαθηματικό λογισμικό Xcas ως ένα δυναμικό περιβάλλον μάθησης Γεωμετρίας.

Το σύστημα Υπολογιστικής Άλγεβρας Xcas

Το Xcas είναι ένα πακέτο λογισμικού στην κατηγορία των CAS (Computer Algebra System) λογισμικών. Επιπλέον των αλγεβρικών δυνατοτήτων του,

υποστηρίζει ένα πλήρες σύστημα δυναμικής γεωμετρίας σε δύο και τρεις διαστάσεις, με γεωμετρικές αναπαραστάσεις που δημιουργούνται, κατ' επιλογή του χρήστη, με εντολές ή με το ποντίκι. Στο Xcas είναι εφικτός ο προγραμματισμός σε Logo και στη δική του γλώσσα. Υπάρχει περιβάλλον με φύλλα εργασίας (spreadsheets), με αυτόματη πραγματοποίηση υπολογισμών και λειτουργίες με σύνολα δεδομένων ([]). Το Xcas είναι ελεύθερο (δωρεάν) στο διαδίκτυο, διαθέσιμο από στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>. Λειτουργεί στα λειτουργικά συστήματα Windows (πλην της έκδοσης Vista), Ubuntu και Macintosh OSX, ακόμα και σε netbooks, με ελληνικό μενού. Μέσα στην on line βοήθεια που παρέχει το πακέτο, υπάρχει manual στα ελληνικά με ευρετήριο και λυμένα παραδείγματα και, forum Ελλήνων χρηστών. Στο forum υπάρχουν διαθέσιμα 10 σύντομα video με αναλυτικές οδηγίες για τη χρήση του Xcas. Στο βασικό μενού επιλογών μέσα από την επιλογή Αρχείο, παρέχεται η δυνατότητα αυτόματης ενημέρωσης από το διαδίκτυο.

Τα γεωμετρικά περιβάλλοντα στο Xcas

Τα αρχεία στο περιβάλλον επίπεδης γεωμετρίας του Xcas περιλαμβάνουν γραμμές εντολών στα αριστερά, οθόνη με το καρτεσιανό επίπεδο στο κέντρο και παλέτα ελέγχου στα δεξιά. Η εκτέλεση μιας εντολής, αυτόματα οδηγεί σε επαναυπολογισμό όλων των επόμενων εντολών, ώστε εάν τροποποιηθεί ένα αντικείμενο, να μπορούν να τροποποιηθούν ανάλογα και τα υπόλοιπα αντικείμενα που εξαρτώνται απ' αυτό. Η διαδραστική χρήση του ποντικιού έξω από το γράφημα αλλάζει την οπτική γωνία, ενώ μέσα στο γράφημα ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας, χαράζει σημεία και γεωμετρικές οντότητες. Το περιβάλλον χωρικής γεωμετρίας ακολουθεί το στυλ του περιβάλλοντος επίπεδης γεωμετρίας: γραμμές εντολών στα αριστερά, γραφικές παραστάσεις στο κέντρο.

Οι δυνατότητες του Xcas για απλές και συνθετότερες κατασκευές παρατίθενται στις επιλογές του μενού Γεω. Εκτός από γεωμετρικά σχήματα, το μενού Γεω διαθέτει εργαλεία μετρήσεων, εργαλεία για εκτέλεση μετασχηματισμών και εργαλεία για έλεγχο ιδιοτήτων.

εδώ «xcas2D.jpeg»

εδώ «xcas3D.jpeg»

Στο μενού Γεω, οι επιλογές των υπομενού σημεία, γραμμές, τρίγωνα τετράπλευρα, πολύγωνα, κύκλοι, κωνικές τομές, επιφάνειες, παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

βαρύκεντρο
κέντρο
στοιχείο
ένα_σημείο_τομής
inter: σημείA_τομής
ισοβαρύκεντρο
μέσο
ορθόκεντρο
σημείο
τυχαίο_2Δ_σημείο
τυχαίο_3Δ_σημείο
κορυφές

δευτεροβάθμια
κώνος
κύλινδρος
ημι_κώνος
επίπεδο
σφαίρα
γράφημα_συνάρτησης

τρίγωνο
ισόπλευρο_τρίγωνο
ισοσκελές_τρίγωνο
ορθογώνιο_τρίγωνο

ακμές
διχοτόμος
ημιευθεία
ευθεία
περιβάλλουσα
εξωτερική_διχοτόμος
ύψος
inter: καμπύλεΣ_τομής
γεωμετρικός_τόπος
εφαπτομένη_σε_συνάρτηση
διάμεσος
μεσοκάθετος
παράλληλος
κάθετος
κάθετο_επίπεδο
κοινή_κάθετος
ευθύγραμμο_τμήμα
εφαπτόμενΕΣ_σε_καμπύλη
διάνυσμα

τόξο
κύκλος
περιγεγραμμένος
παραγεγραμμένος
εγγεγραμμένος

κύκλος
έλλειψη
υπερβολή
παραβολή
κωνική_τομή

κύβος
πυραμίδα
παραλληλεπίπεδο
πολύεδρο
τετράεδρο

κεντρικό_τετράεδρο
κεντρικός_κύβος
οκτάεδρο
δωδεκάεδρο
εικοσάεδρο

Οι επιλογές των υπομενού μετασχηματισμοί και ιδιότητες δείχνουν την ποικιλία λειτουργιών που περιλαμβάνονται:

ομοιοθεσία
αντιστροφή
προβολή
περιστροφή
ομοιότητα
συμμετρία
μετάθεση
πολική_αντιστροφή

είναι_συγγραμμικό
είναι_συγκυκλικό
είναι_συνεπίπεδο
είναι_στοιχείο
είναι_παράλληλος
είναι_ορθογώνιο
είναι_ισόπλευρο
είναι_ισοσκελές
είναι_τετράγωνο
είναι_ρόμβος
είναι_παραλληλόγρα
είναι_συζυγής
είναι_δέσμη_κύκλων
είναι_δέσμη_ευθειών

Στο υπομενού γράφημα του μενού Γεω υπάρχουν επιλογές για γραφική απεικόνιση παραμετρικών καμπύλων και επιφανειών:

εδώ «parametricplot.jpeg»

εδώ «parametricplot3D.jpeg»

καθώς και εξειδικευμένες δυνατότητες σε αναπαραστάσεις χωρίων:

εδώ «αναπαράσταση χωρίου.jpeg»

Όλα τα γραφήματα εξάγονται και αποθηκεύονται σε .eps μορφή.

Ο προγραμματισμός σε Logo (□ παρ. 5.2.1) είναι μια ακόμη δυνατότητα του Xcas. Για να ανοίξουμε μια συνεδρία Logo, επιλέγουμε Χελώνα→ Νέα χελώνα. Το περιβάλλον Logo αποτελείται από τρία μέρη, το γράφημα στο κέντρο, μια υποσυνεδρία με γραμμές εντολών αριστερά και ένα παράθυρο με τον επεξεργαστή προγραμμάτων δεξιά. Οι εντολές εκτελούνται όπως σε όλες τις κύριες συνεδρίες, ενώ ο επεξεργαστής προγραμμάτων τις καταγράφει. Στο περιβάλλον Logo μπορούμε να οδηγήσουμε τη χελώνα, δίνοντας εντολές έως και 10 βήματα μπροστά, π.χ. στρίψε δεξιά ή αριστερά κ.λ.π. Η χελώνα θα χαράξει την πορεία με ένα στυλό με καθορισμένο χρώμα. Οι κινήσεις της χελώνας μπορούν να προγραμματιστούν με τη γλώσσα του Xcas. Οι πιο βασικές εντολές είναι διαθέσιμες σε ένα πληκτρολόγιο κάτω από την οθόνη της χελώνας. Η εξήγηση των εντολών εμφανίζεται τοποθετώντας τον κέρσορα πάνω στα πλήκτρα. Οι περισσότερες εντολές έχουν εξ' ορισμού όρισμα (π.χ. 10 για την εντολή *avance*), ωστόσο μπορούμε να δώσουμε άλλο όρισμα χωρίς να είναι μέσα σε παρενθέσεις. Για να ορίσουμε προτεραιότητες στις εντολές Logo βάζουμε παρενθέσεις γύρω από τις εντολές και τα ορίσματα, π.χ. (*hasard* 10).

Προοπτικές χρήσης με τις δυνατότητες του Xcas

Επεξεργασία εικόνας

Σε μια συνεδρία του Xcas (έκδοση 0.9.7) μπορούν να συνυπάρχουν εντολές για κατασκευές, γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, μετρήσεις, έλεγχο ιδιοτήτων αλλά και εντολές για επεξεργασία εικόνας. Οι εντολές επεξεργασίας εικόνας καλύπτουν τις ακόλουθες κατηγορίες:

Επεξεργασία εικόνας: Είσοδος: Εικόνα → Έξοδος: Εικόνα

Ανάλυση εικόνας: Είσοδος: Εικόνα → Έξοδος: Αποτελέσματα μετρήσεων

Κατανόηση εικόνας: Είσοδος: Εικόνα → Έξοδος: Προσδιορισμός στοιχείων υψηλού επιπέδου

Η εντολή *readrgb* διαβάζει ένα αρχείο εικόνας, χρησιμοποιώντας τις αρχικές του διαστάσεις, ή αυτές που δίνονται στο όρισμα. Για παράδειγμα, γράφοντας

```
L:=readrgb("image.jpg") ή L:=readrgb("image.jpg",256,256)
```

το Xcas διαβάζει την εικόνα σε jpg (μπορεί και σε png), όπου

```
L==[ [4,256,256], L[1](r), L[2](g), L[3](b), L[4](transparency) ]
```

Η εικόνα εμφανίζεται στο Xcas με την εντολή

```
rectangle(0,1,1,gl_texture="image.png").
```

Η εντολή `writergb` γράφει ένα αρχείο εικόνας:

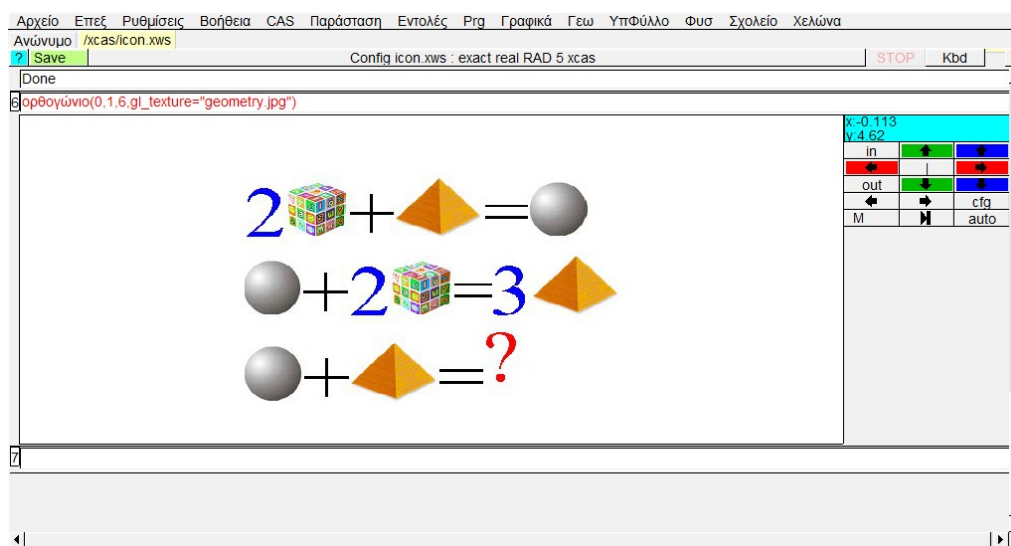
```
writergb("image.png",L);
```

Αν θέλουμε ασπρόμαυρη εικόνα στο png αρχείο γράφουμε

```
writergb("image.png",[[1,256,256], L[1]])
```

Η εικόνα που ακολουθεί, θα μπορούσε να είναι το ερέθισμα για ένα σχέδιο εργασίας σχετικά με τον υπολογισμό όγκων γεωμετρικών στερεών. Οι υπολογισμοί όγκων και οι αναπαραστάσεις των γεωμετρικών στερεών μπορούν να πραγματοποιηθούν σε επόμενες καταχωρήσεις στο Xcas, ώστε η συνεδρία να αποτελέσει το αποκλειστικό περιβάλλον εργασίας του σχεδίου εργασίας.

εδώ «image.jpeg»



Προγραμματισμός

Το Xcas παρέχει τη δυνατότητα γεωμετρικών κατασκευών μέσα από προγραμματιστικές διαδικασίες.

Ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα αναδρομικού προγράμματος. Κατασκευάζουμε μια ακολουθία τετραγώνων που προκύπτει ενώνοντας σε κάθε τετράγωνο τα μέσα των πλευρών του, μέχρι τα τμήματα να γίνουν πολύ μικρά ή να ολοκληρώσουμε την κατασκευή για n τετράγωνα. Η κατασκευή χρησιμοποιεί την έννοια της αναδρομής και προγραμματίζεται στον επεξεργαστή προγραμμάτων του Xcas.

Στο περιβάλλον του Xcas, για να ανοίξουμε ένα νέο πρόγραμμα, επιλέγουμε `Prg`→`Νέο πρόγραμμα`. Οι κώδικες για την κατασκευή με τα τετράγωνα είναι:

```
carres (A, B) := {
```

```

local L;
L:=square(A,B);
if (distance2(A,B)>0.01) {
  L:=L, carres(A+(B-A)/2,B+(B-A)*i/2);
}
return L;
};;

```

Σε μια καταχώρηση του Xcas γράφοντας

```
carres(point(-1),point(1))
```

παίρνουμε το μοτίβο των τετραγώνων από το πιο μεγάλο (carré (-1,1,1+2*i,-1+2*i)) έως το πιο μικρό (carré (0,1+i,i,-1+i)).

εδώ «squares.jpeg»

Η επόμενη κατασκευή είναι η αλληλουχία όμοιων τριγώνων ενός τριγώνου ABΓ. Ξεκινώντας με ένα τρίγωνο ABΓ, δημιουργούμε τρίγωνο AΓΓ1 όμοιο με το ABΓ. Έπειτα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο AΓ1Γ2 κ.ο.κ. Ένα επαναληπτικό πρόγραμμα στο Xcas σχεδιάζει την αλληλουχία n τριγώνων AΓΓ1, AΓ1Γ2, AΓ(v-1)Γv. Αρχικά σχεδιάζουμε το τρίγωνο ABΓ και χρησιμοποιούμε ένα βρόχο που υπολογίζει σε κάθε βήμα το καινούργιο σημείο B, το παλιό και το καινούργιο σημείο Γ όπως προκύπτει με ομοιότητα ως προς το A με λόγο ομοιότητας $k := \text{distance}(A,C) / \text{distance}(A,B)$ και γωνία $t := \text{angle}(A,B,C)$.

Οι κώδικες για την κατασκευή με τα τρίγωνα είναι:

```

//a partir d'un triangle ABC on trace son semblable
//sur AC etc...
//k=rapport et t=angle de la similitude
//n=nombre de triangles a construire
spirale(A,B,C,n):={
local k,t,j,L;
L:=triangle(A,B,C);
k:=distance(A,C)/distance(A,B);
t:=angle(A,B,C);
for (j:=1;j<=n;j++){
  B:=C;
  C:=ομοιότητα(A,k,t,B);
  L:=L,triangle(A,B,C);
}
return L;
};;

```

Με κλικ σε τρία σημεία ABΓ, και γράφοντας:

```
spirale(A,B,C,5)
```

παίρνουμε την αλληλουχία 6 τριγώνων.

εδώ «triangles.jpeg»

Οι προγραμματιστικές εφαρμογές είναι από το φάκελο του Xcas «xcas_doc», στην ενότητα της Γεωμετρίας.

Μια πειραματική διερεύνηση τριγώνων στα οποία ορθόκεντρο και βαρύκεντρο συμπίπτουν

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί και μαθητές θα απέφευγαν την πειραματική διερεύνηση των γεωμετρικών συσχετίσεων, που απαιτεί αλληπάλληλες κατασκευές σε χαρτί. Ο έλεγχος ταύτισης βαρύκεντρου και ορθόκεντρου, προβλέπει την κατασκευή πολλών ειδών τριγώνων με τα βαρύκεντρα και τα ορθόκεντρά τους. Η χρήση ενός συστήματος δυναμικής γεωμετρίας, με τις δυνατότητες κίνησης που παρέχει, μας επιτρέπει να μεταβάλλουμε το τρίγωνο, να παρατηρούμε τις μεταβολές των θέσεων ορθόκεντρου και βαρύκεντρου και να βγάλουμε τα συμπεράσματά μας.

Δουλεύοντας στο Xcas, για να ανοίξουμε το περιβάλλον με τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας, επιλέγουμε από το βασικό μενού επιλογών Ρυθμίσεις→Γενικές Ρυθμίσεις, Επίπεδο: Γεωμετρία. Η κατασκευή τριγώνου με το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο, δύναται να πραγματοποιηθεί με χρήση του ποντικιού ή/και με τις εντολές γεωμετρίας του Xcas. Στις ακόλουθες ενότητες περιγράφονται και οι δύο τεχνικές, ώστε να αντιληφθεί ο χρήστης τις δυνατότητες και τη συντακτική λογική του Xcas και να επιλέξει τον τρόπο εργασίας που τον εξυπηρετεί.

α) Κατασκευή με το ποντίκι

Το γεωμετρικό περιβάλλον του Xcas έχει έναν τρόπο λειτουργίας που επηρεάζει τη λειτουργία του ποντικιού. Σε λειτουργία Mode το ποντίκι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει σημεία και γεωμετρικές οντότητες. Η μέθοδος κατασκευής με το ποντίκι απευθύνεται σε αρχάριους χρήστες και σε μαθητές Γυμνασίου.

Η κατασκευή ενός τριγώνου, από το οποίο ξεκινά η εφαρμογή μας, γίνεται ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα, τρία μη συνευθειακά σημεία. Τα σημεία ορίζονται με τις επιλογές Mode→σημείο, με κλικ του ποντικιού στο καρτεσιανό σύστημα του Xcas. Οι πλευρές του τριγώνου κατασκευάζονται με τις επιλογές Mode→Γραμμές→ευθύγραμμο_τμήμα, με κλικ του ποντικιού στις κορυφές του τριγώνου ανά δύο. Με την επιλογή Mode→δείκτης, κάνουμε τον κέρσορα να λειτουργεί σαν δείκτης και, μπορούμε να μετακινούμε/μεταβάλλουμε το τρίγωνο στο επίπεδο. Για στατικές εφαρμογές, η κατασκευή τριγώνου γίνεται αυτόματα, από τις επιλογές Mode → Πολύγωνα → Τρίγωνο.

Σχεδιάζουμε τα ύψη του τριγώνου, από τις επιλογές Mode →Γραμμές →Κάθετος, με κλικ στην κορυφή της γωνίας από την οποία άγεται το ύψος και κλικ σε ένα σημείο της απέναντι πλευράς. Για να καταγράψει το σύστημα το ορθόκεντρο, αλλάζουμε τον τρόπο λειτουργίας του κέρσορα, σε σημείο τομής: Mode → Τομές → Μοναδική τομή(1 σημείο). Το σημείο τομής των δύο καθέτων είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Η κατασκευή των διαμέσων γίνεται από τις επιλογές Mode →Γραμμές →Διάμεσος, με κλικ του ποντικιού στην κορυφή της γωνίας από την οποία

άγεται η διάμεσος και κλικ σε καθένα από τα άκρα της απέναντι πλευράς. Για να καταχωρηθεί στο σύστημα το βαρύκεντρο, αλλάζουμε τον τρόπο λειτουργίας του κέρσορα, σε σημείο τομής: Mode→ Τομές →Μοναδική τομή(1 σημείο). Το σημείο τομής των δύο διαμέσων είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Έως τώρα, με χρήση του μενού Mode στο Xcas, όλες οι γεωμετρικές οντότητες (τρίγωνο, διάμεσοι, ύψη, σημεία τομής) κατασκευάζονται με το ποντίκι, με τη λογική σειρά που θα ακολουθούσε ο χρήστης και στις κατασκευές με το χέρι.

Για να πειραματιστούμε με τα είδη τριγώνων, μετακινούμε μία κορυφή του τριγώνου με τον κέρσορα στη λειτουργία «δείκτης», επιδιώκοντας ορθόκεντρο και βαρύκεντρο να συμπίψουν.

εδώ «efarmogi.jpeg»

Υπολογίζουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και επαληθεύουμε ότι στο ισόπλευρο τρίγωνο, ορθόκεντρο και βαρύκεντρο συμπίπτουν. Με τις επιλογές Mode→ Μετρήσεις→Απόσταση και με κλικ στις κορυφές του τριγώνου ανά δύο, υπολογίζουμε τα μήκη των πλευρών του.

β) Κατασκευή με εντολές

Η εισαγωγή των εντολών του Xcas, γίνεται από τα υπομενού της επιλογής Γεω του βασικού μενού επιλογών, στις γραμμές εντολών της διεπιφάνειας. Η μέθοδος κατασκευής με εντολές απευθύνεται σε χρήστες μυημένους σε υπολογιστικά περιβάλλοντα ή μαθητές Λυκείου και φοιτητές θετικής κατεύθυνσης.

Σε μια γραμμή εντολών (καταχώρηση) στο περιβάλλον επίπεδης γεωμετρίας ορίζουμε τις κορυφές του τριγώνου από τις επιλογές Γεω→Σημεία→σημείο. Η εντολή «σημείο» δέχεται ως όρισμα τις συντεταγμένες του σημείου (x,y), όπως θα τις ορίζαμε και στο γραπτό λόγο. Π.χ. γράφουμε A:=σημείο(-3,3). Με τις επιλογές Γεω→Πολύγωνα→τρίγωνο κατασκευάζουμε το τρίγωνο με κορυφές τα τρία σημεία που ορίσαμε. Η εντολή «τρίγωνο» δέχεται ως ορίσματα τις κορυφές του τριγώνου. Π.χ. γράφουμε τρίγωνο(A,B,Γ). Για το ορθόκεντρο, η κατασκευή των υψών γίνεται από τις επιλογές Γεω→Γραμμές→κάθετος. Η εντολή «κάθετος» σχεδιάζει την ευθεία Δ που είναι κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και διέρχεται από το σημείο A:
$$\Delta:=\text{κάθετος}(A,\text{ευθεία}(B,\Gamma))$$

Με τον ίδιο τρόπο δημιουργούμε και τις άλλες δύο καθέτους (έστω E και Z) προς τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου. Για να καταχωρηθεί το ορθόκεντρο στο σύστημα, το ορίζουμε ως το σημείο τομής δύο υψών, επιλέγοντας Γεω→Σημεία→ένα_σημείο_τομής και το ονομάζουμε H:

$$H:=\text{ένα_σημείο_τομής}(E,Z)$$

Η εμφάνιση του ορθόκεντρου ορίζεται από τις επιλογές Γεω→Εμφάνιση→εμφάνιση. Με τις επιλογές του υπομενού Εμφάνιση στην εντολή σημείο, ορίζουμε τα χαρακτηριστικά εμφάνισης του ορθόκεντρου:

H:=ένα_σημείο_τομής(E,Z,
'εμφάνιση'=κόκκινο+τετραγωνικό_σημείο+εύρος_σημείου_3)

Η κατασκευή βαρύκεντρου, προϋποθέτει την κατασκευή των διαμέσων του τριγώνου. Με τις επιλογές Γεω→Γραμμές→διάμεσος, η εντολή «διάμεσος» κατασκευάζει τη διάμεσο Θ που διέρχεται από το σημείο Α προς την απέναντι πλευρά ΒΓ, δίνοντας το σημείο Α και τα σημεία Β,Γ που ορίζουν την απέναντι πλευρά:

Θ:=διάμεσος(Α, Β,Γ)

Με τον ίδιο τρόπο δημιουργούμε και τις άλλες δύο διαμέσους (έστω Ι και Κ). Για να καταχωρηθεί το βαρύκεντρο στο σύστημα, το ορίζουμε ως το σημείο τομής δύο διαμέσων, επιλέγοντας Γεω→Σημεία→ένα_σημείο_τομής και το ονομάζουμε Λ:

Λ:=ένα_σημείο_τομής(Ι,Κ)

Με τις επιλογές του υπομενού Εμφάνιση της επιλογής Γεω ορίζουμε την εμφάνιση του βαρύκεντρου, ώστε να διαφοροποιείται από το ορθόκεντρο:

Λ:=ένα_σημείο_τομής(Ι,Κ,
'εμφάνιση'=μπλε+τετραγωνικό_σημείο+εύρος_σημείου_3)

Όπως και προηγουμένως, μετακινώντας μία κορυφή του τριγώνου με τον κέρσορα στη λειτουργία «δείκτης», επιδιώκουμε ορθόκεντρο και βαρύκεντρο να συμπίψουν.

Με τις επιλογές Ιδιότητες→είναι_ισόπλευρο

είναι_ισόπλευρο(Α,Β,Γ)

το αποτέλεσμα 1 σημαίνει ότι τα τρία σημεία Α,Β,Γ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

Συμπεράσματα

Με θέμα μια εφαρμογή δυναμικής γεωμετρίας, παρουσιάζονται οι δυνατότητες του ελεύθερου λογισμικού Xcas, που εύστοχα χαρακτηρίστηκε και ως ελβετικός σουγιάς των μαθηματικών. Η ομάδα χρηστών όπου απευθύνεται, περιλαμβάνει εκπαιδευτές και εκπαιδευόμενους κάθε βαθμίδας, καθώς είναι εφοδιασμένο με διεπιφάνεια μεταφρασμένη στα ελληνικά, ελληνικό εγχειρίδιο χρήσης, forum ελλήνων χρηστών. Το πλούσιο μενού επιλογών, τα επεξηγηματικά παράθυρα βοήθειας για τις συναρτήσεις, η χρήση του ποντικιού για τις κατασκευές, προσφέρονται για χρήστες χωρίς ιδιαίτερες δεξιότητες. Η δημιουργία δισδιάστατων και τρισδιάστατων γραφικών με πολλές επιλογές εμφάνισης, με δυνατότητα καταχώρησης κειμένου στο ίδιο αρχείο, ο προγραμματισμός στη γλώσσα γεωμετρίας της χελώνας, καθιστούν το Xcas μια ολοκληρωμένη εφαρμογή δυναμικής γεωμετρίας. Οι δυνατότητες επεξεργασίας εικόνας και δημιουργίας γεωμετρικών κατασκευών μέσα από προγραμματιστικές διαδικασίες, επιτρέπουν την ανάπτυξη προωθημένων σχεδίων εργασίας.

Στην εκπαιδευτική εφαρμογή που παρουσιάζουμε, περιγράφουμε βήμα προς βήμα τις ενέργειες που χρειάζονται στο περιβάλλον του Xcas, για να δημιουργήσουμε μια σειρά δυναμικών εικόνων όπου βλέπουμε τις θέσεις ορθόκεντρου και βαρύκεντρου τριγώνου μέχρι αυτά να ταυτιστούν. Η ταύτιση φαίνεται να συμβαίνει σε ισόπλευρο τρίγωνο, γεγονός που επαληθεύεται, υπολογίζοντας με τα εργαλεία μέτρησης του Xcas τα μήκη των πλευρών του ή ελέγχοντας την ιδιότητα του Xcas «είναι_ισόπλευρο».

Χρήσιμοι Σύνδεσμοι

www.cinderella.de/tiki-index.php

http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en

<http://www.geogebra.org/cms>

<http://www.cabri.com>

<http://geonext.uni-bayreuth.de>

<http://www.dynamicgeometry.com>

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>

<http://inf-server.inf.uth.gr/~akritas/cas.htm>

Βιβλιογραφία

Clements D., «Teaching and learning Geometry». In Kilpatrick J., Martin W.G. and Schifter D. (eds). A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics, 151-178. Reston: NCTM

Christou K., Mousoulidis N., Pittalis M., Pitta-Pantazi D., (2004). «Proofs through exploration in dynamic geometry environments». The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norway.

Davis, P. (1995): «The rise, fall, and possible transfiguration of triangle Geometry». American Mathematical Monthly, 102(3), 204 – 214.

Jackiw, N. (designer) (1996). The Geometer's Sketchpad – Educational Software Key Curriculum Press, Berkeley.

Parisse, B. An Introduction to the Xcas Interface, available at http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac/tutoriel_en.pdf

Oldknow A. (1995): «Computer aided research into triangle geometry». The mathematical Gazette, 79(485), 263-274.

Scher, D. (1999): «Problem solving proof in the age of dynamic geometry». Micromath, 15(1), 24-30.

Πιπτάλης Μ., Μουσουλίδης Ν., & Χρίστου Κ. «Νέες προοπτικές στη διδασκαλία της γεωμετρίας: Η περίπτωση του εμβαδού πολυγώνων». 4ο Συνέδριο ΕΤΠΕ, 29/09 – 03/10/2004, Παν/μιο Αθηνών.

Τουμάσης Μπ., Αρβανίτης Τ. (2003): Διδασκαλία μαθηματικών με χρήση Η/Υ. Εκδόσεις Σαββάλας.

Χρίστου Κ., Πίττα-Πανταζή Δ., (2004). «Η έννοια και διδασκαλία της δυναμικής γεωμετρίας». Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών, Γαγάτσης Αθ. (Ed.), 179-188, Λευκωσία.

Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα κέντρα στήριξης επιμόρφωσης. Τεύχος 4 Κλάδος ΠΕ03 Α' έκδοση (2010) Πάτρα ΕΑΙΤΥ Τομέας Επιμόρφωσης και κατάρτισης, διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση

http://axis.teikav.edu.gr/pake/Yliko_Eidikou_Merous/Yliko_KSE_PE03.pdf